MATEMATIKA 12

Uždavinynas



MATEMATIKA 12

UŽDAVINYNAS

Išplėstinis kursas

TEV

VILNIUS 2004

Darbo vadovas *Vilius Stakėnas*

Redaktoriai: *Juozas Mačys*, *Valdas Vanagas*

Programinė įranga: *Rolandas Jakštys*, *Tadeuš Šeibak*

Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė*

Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Laimutė Ališauskienė*, *Nijolė Drazdauskienė*

Korektorė *Žydrūnė Stundžienė*

Konsultantai: *Marytė Stričkienė*, *Elmundas Žalys*

Recenzavo Matematikos ir informatikos institutas

2004 07 19. 7 sp. l. Užs. Nr. 925
Leidykla TEV, Akademijos g. 4, LT-08412 Vilnius
Spausdino UAB „Spaudos kontūrai“,
Viršuliškių skg. 80, LT-05131 Vilnius

Leidyklos TEV interneto svetainė www.tev.lt

ISBN 9955–491–70–1

TURINYS

Leidėjų žodis 4

1. Išvestinės 5

1.1. Ribos ir išvestinės 5
1.2. Išvestinių taikymas funkcijoms tirti 14
1.3. Funkcijų išvestinių skaičiavimo taisyklės 20
1.4. Trigonometrinių funkcijų išvestinės 26
1.5. Rodiklinės, logaritminės ir laipsninės funkcijų išvestinės 31
1.6. Funkcijų išvestinių taikymai 36

2. Integralai 42

2.1. Pirmykštės funkcijos ir neapibrėžtiniai integralai 42
2.2. Apibrėžtiniai integralai 45

3. Tikimybės 53

3.1. Įvykių tikimybės 53
3.2. Atsitiktiniai dydžiai 56

4. Statistika 60

5. Stereometrija. Vektoriai. Erdviniai kūnai 63

5.1. Tiesės ir plokštumos 63
5.2. Erdvės vektoriai 71
5.3. Briaunainiai 76
5.4. Sukiniai 84

Atsakymai 89

LEIDĖJŲ ŽODIS

Šis uždavinynas parengtas pagal naująjį matematikos vadovėlį XII klasei (Matematika 12, TEV, Vilnius, 2003). Vadovėlyje esančių uždavinių tikriausiai pritrūks tiems, kas siekia tikrai išsamių matematikos žinių, todėl parengėme šį uždavinyną. Jį sudaro penki skyriai, išdėstyti ta pačia tvarka, kaip ir XII klasės matematikos vadovėlyje. Sunkesni uždaviniai pažymėti žvaigždute.
Tai antras uždavinyno leidimas. Jis skiriasi nuo pirmojo tuo, kad čia ištaisyti pastebėti netikslumai, o svarbiausia — pateikti beveik visų uždavinių atsakymai.
Uždavinių atsakymai skelbiami ir internete adresu *www.mif.vu.lt/matinf/vadov/prad.htm*

Uždavinius parinko XII klasės vadovėlio autoriai Kornelija Intienė, Vilius Stakėnas, Eugenijus Stankus, Antanas Skūpas ir Vladas Vitkus.

Linkime sėkmės!

1. IŠVESTINĖS

1.1. RIBOS IR IŠVESTINĖS

1. Išspręskite nelygybę, sprendinius pažymėkite Ox ašyje:

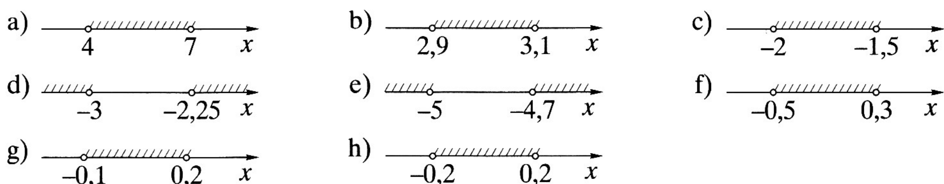
a) $|x-3|<4$; b) $|x+4|<2$; c) $|x+1|<1$; d) $|x-2|<2$;

e) $|x|>3$; f) $|x|<4$; g) $|x-5|>1$; h) $|x-4|>2$.

2. Kokią nelygybę tenkina skaičiai x, jeigu juos vaizduojančio skaičių tiesės taškų atstumai:

a) iki skaičiaus 2 taško mažesni už 3;
b) iki skaičiaus 0 taško mažesni už 2;
c) iki skaičiaus 10 taško mažesni už 0,1;
d) iki skaičiaus 5 taško mažesni už 0,01;
e) iki skaičiaus 3 taško didesni už 0,5;
f) iki skaičiaus 1 taško didesni už 0,5?

3. Nelygybėmis $|x-a|<b$, $|x-a|>b$ užrašykite brėžinyje pavaizduotus intervalus:



4. Duota funkcija $f(x)=2x-3$. Raskite argumento x reikšmes, su kuriomis:

a) $|f(x)-3|<1$; b) $|f(x)-3|<0{,}5$;

c) $|f(x)-3|<0{,}2$; d) $|f(x)-3|<0{,}1$.

Nubraižykite funkcijos $f(x)=2x-3$ grafiką. Brėžinyje pažymėkite nelygybe nusakytas funkcijos reikšmes ir rastąsias argumento x reikšmes.

5. Patyrinėkite funkciją $f(x)=x^3$.

1) Nubraižykite funkcijos $y=f(x)$ grafiką.
2) Pažymėkite jame tašką (2; 8).
3) Kokias reikšmes įgyja funkcija $f(x)=x^3$, kai $x\in[1{,}5;\,2{,}5]$?
4) Panagrinėkite, kaip kinta funkcijos reikšmės, kai argumento x reikšmės darosi vis artimesnės 2. Pabaikite pildyti lentelę:

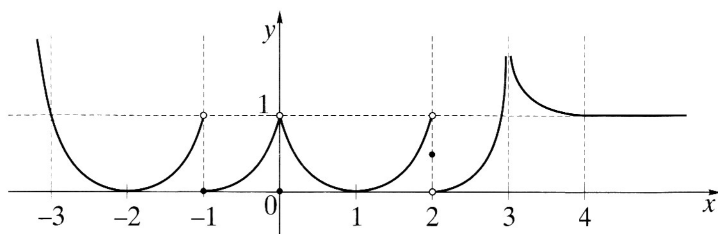
x	1,97	1,98	1,99	2	2,01	2,02	2,03
x^3		7,762392					
$\|x^3-8\|$		0,237608					

5) Kiek artimas taškui $x=2$ turime imti x reikšmes, t. y. koks nelygybėje $|x-2|<\delta$ turi būti δ, kad būtų teisinga nelygybė $|x^3-8|<0{,}3$?

6) Koks nelygybėje $|x-2|<\delta$ turi būti δ, kad su visais x būtų teisinga nelygybė $|x^3-8|<0{,}2$?

7) Raskite nelygybėje $|x-2|<\delta$ kokį nors δ, kad su visais x būtų teisinga nelygybė $|x^3-8|<0{,}01$.

6. Pavaizduotas gana „kaprizingos“ funkcijos $y=f(x)$ grafikas.



Kurie iš teiginių yra teisingi:

a) $\lim\limits_{x\to-3} f(x)=1$;
b) $\lim\limits_{x\to-2} f(x)=0$;
c) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=1$;
d) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)=0$;
e) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=1$;
f) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=0$;
g) $\lim\limits_{x\to0} f(x)=2$;
h) $\lim\limits_{x\to0} f(x)$ neegzistuoja;
i) $\lim\limits_{x\to2} f(x)=\frac{1}{2}$;
j) $\lim\limits_{x\to2} f(x)$ neegzistuoja;
k) $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ neegzistuoja;
l) $\lim\limits_{x\to4} f(x)=1$?

7. Remdamiesi funkcijų ribų savybėmis, apskaičiuokite ribą:

a) $\lim\limits_{x\to1}(x^4+1)$;
b) $\lim\limits_{x\to2}(x^3-2x)$;
c) $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x+1}{x-2}$;
d) $\lim\limits_{x\to3}\frac{3x^2-10x}{x-6}$;
e) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^5(x+1)}{x+2}$;
f) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2(x+2)}{x-1}$.

8. Nubraižykite funkcijos $f(x)=\frac{|x^2-1|}{x^2-1}$ grafiką. Ar egzistuoja riba:

a) $\lim\limits_{x\to1} f(x)$;
b) $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$?

9. Raskite funkcijos ribą, nubraižykite jos grafiką:

a) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}$;
b) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x-3}$;
c) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-4x-5}{x+1}$;
d) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+6x+8}{x+2}$.

10. Raskite funkcijos ribą:

a) $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3}$;
b) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-7x-8}{x^2+5x+4}$;
c) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2-2x-8}{x^2+7x+10}$;
d) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+6x-7}{x^2+2x-3}$.

11. Raskite funkcijos ribą:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-1}{x-1}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^6-1}{x-1}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$; e) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x-2}$; f) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^6-64}{x-2}$.

12. Pateikite pavyzdžių funkcijų, neapibrėžtų taške $x = 2$, bet tokių, kad $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$. Paaiškinkite, kuo ypatingi tokių funkcijų grafikai.

13. Raskite funkcijos ribą:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+3}-1}{x+2}$;

c) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x-2}-2}{x-3}$; d) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1}$.

14. Raskite funkcijos ribą:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3x+1}}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{1-3x}}{x+1}$;

c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{6-x}}{x-2}$; d) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{8+2x}}{x+2}$.

15. Raskite funkcijos ribą:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{x-2}$.

***16.** Panagrinėkite labai keistą funkciją, pavadintą žymaus vokiečių matematiko Dirichlė vardu. Ji dažniausiai žymima graikų raide χ (skaityk: chi):

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x \text{ racionalus,} \\ 0, & \text{kai } x \text{ iracionalus.} \end{cases}$$

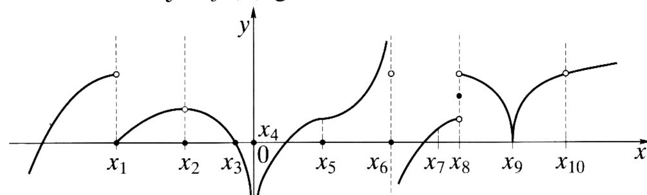
a) Ar galėtumėte nubraižyti Dirichlė funkcijos grafiką?
b) Paaiškinkite, kodėl $\lim\limits_{x\to 1}\chi(x)$ neegzistuoja.
c) Paaiškinkite, kodėl $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\chi(x)$ neegzistuoja.
d) Kodėl neegzistuoja $\lim\limits_{x\to a}\chi(x)$ bet kuriam $a \in \boldsymbol{R}$?

***17.** Apibrėžkime „dukterinę“ Dirichlė funkciją:

$$\chi_1(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kai } x \text{ racionalus,} \\ 0, & \text{kai } x \text{ iracionalus.} \end{cases}$$

Kuriems a egzistuoja $\lim\limits_{x\to a}\chi_1(x)$?

18. Duotas funkcijos $f(x)$ grafikas:



Kuriuose iš pažymėtų taškų $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$ funkcija $f(x)$ yra tolydi?

19. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką. Ar ji tolydi taške $x = 1$?

a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kai } x \leqslant 1, \\ 3 - x, & \text{kai } x > 1; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{kai } x \leqslant 1, \\ x - 2, & \text{kai } x > 1; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{kai } x \leqslant 1, \\ x + 2, & \text{kai } x > 1; \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & \text{kai } x \leqslant 1, \\ -x + 1, & \text{kai } x > 1; \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & \text{kai } x \leqslant 1, \\ x - 2, & \text{kai } x > 1; \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kai } x \leqslant 1, \\ x - 1, & \text{kai } x > 1; \end{cases}$

g) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{kai } x \leqslant 1, \\ x^2 - 4x + 3, & \text{kai } x > 1; \end{cases}$ h) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{kai } x \leqslant 1, \\ -x^2 + 4x - 1, & \text{kai } x > 1; \end{cases}$

i) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{kai } x \leqslant 1, \\ x^2 - 2x + 2, & \text{kai } x > 1. \end{cases}$

20. Nubraižykite funkcijos $g(x)$ grafiką. Nustatykite, kuriuose taškuose funkcija $g(x)$ yra trūki:

a) $g(x) = \frac{x+|x|}{2x}$; b) $g(x) = \frac{\cos x}{|\cos x|}$;

c) $g(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{|\operatorname{tg} x|}$; d) $g(x) = \frac{|\operatorname{tg} x| + \operatorname{tg} x}{2}$.

21. Parinkite skaičių k tokį, kad funkcija $f(x)$ būtų tolydi aibėje $\boldsymbol{R}$. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{kai } x \leqslant 0, \\ -x + k, & \text{kai } x > 0; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + 2, & \text{kai } x \leqslant 0, \\ 2x + k, & \text{kai } x > 0; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{kai } |x| \leqslant 1, \\ k - |x|, & \text{kai } |x| > 1; \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{kai } |x| \geqslant 1, \\ |x| + k, & \text{kai } |x| < 1. \end{cases}$

22. Ar galima parinkti tokį skaičių k, kad funkcija $g(x)$ būtų tolydi aibėje $\boldsymbol{R}$? Kodėl?

a) $g(x) = \begin{cases} |x - 1| + k, & \text{kai } x \in [0; 2], \\ x^2 - 4x + 5, & \text{kai } x \notin [0; 2]; \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, & \text{kai } x \in [-2; 0], \\ x^2 + k, & \text{kai } x \notin [-2; 0]. \end{cases}$

23. Parinkite skaičių k tokį, kad funkcija $f(x)$ būtų tolydi realiųjų skaičių aibėje $\boldsymbol{R}$. Nubraižykite funkcijos $f(x)$, su parinktuoju k, grafiką:

a) $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & \text{kai } x \geqslant 1, \\ kx - 1, & \text{kai } x < 1; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & \text{kai } |x| \leqslant 1, \\ k - |x|, & \text{kai } x > 1; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{kai } |x| \leqslant 1, \\ k + \cos \pi x, & \text{kai } |x| > 1; \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} k^2, & \text{kai } x < -1, \\ k \arccos x, & \text{kai } |x| \leqslant 1, \\ \pi - k, & \text{kai } |x| > 1. \end{cases}$

***24.** Ar 16 uždavinyje apibrėžta Dirichlė funkcija tolydi bent viename taške? Kodėl?

***25.** 17 uždavinyje apibrėžta funkcija $\chi_1(x)$ yra tolydi tiktai taške $x = 0$. Kodėl?

***26.** Sukonstruokite funkciją, kuri būtų tolydi tiktai taškuose $x \in \boldsymbol{Z}$.

27. Duota funkcija $f(x) = 2x - 3$.
1. Nubraižykite šios funkcijos grafiką.
2. Apskaičiuokite ir brėžinyje pažymėkite:
   a) $\Delta f(0)$, kai $\Delta x = 2$;
   b) $\Delta f(-1)$, kai $\Delta x = -1$;
   c) $\Delta f(3)$, kai $\Delta x = 0{,}5$;
   d) $\Delta f(-3)$, kai $\Delta x = -0{,}5$.

28. Raskite funkcijos $f(x) = \frac{1}{x^2}$ pokytį $\Delta f(x_0)$, kai:

a) $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}1$;
b) $x_0 = 1$, $\Delta x = -0{,}1$;
c) $x_0 = -1$, $\Delta x = 0{,}1$;
d) $x_0 = -1$, $\Delta x = -0{,}1$;
e) $x_0 = 2$, $\Delta x = 0{,}1$;
f) $x_0 = -2$, $\Delta x = 0{,}1$.

Remdamiesi e) ir f) punktuose apskaičiuotais pokyčiais $\Delta f(2)$ ir $\Delta f(-2)$ bei funkcijos $f(x)$ savybėmis, pasakykite, kam lygūs pokyčiai $\Delta f(2)$, kai $\Delta x = -0{,}1$; $\Delta f(-2)$, kai $\Delta x = 0{,}1$.

29. Remdamiesi funkcijos reikšmių pokyčiais įrodykite, kad funkcija $f(x)$ intervale I yra didėjanti:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x$, $I = (0; +\infty)$;
b) $f(x) = x^3 + 2x^2$, $I = (0; +\infty)$;
c) $f(x) = \sqrt{x+2}$, $I = (0; +\infty)$;
d) $f(x) = \sqrt{x^2+x}$, $I = (0; +\infty)$;
e) $f(x) = \frac{1}{1-x}$, $I = (2; +\infty)$;
f) $f(x) = \log_3 x$, $I = (1; +\infty)$;
g) $f(x) = 3^x$, $I = (-\infty; +\infty)$;
*h) $f(x) = \cos^2 x$, $I = \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

30. Įrodykite, kad funkcijos $g(x)$ reikšmės intervale I mažėja:

a) $g(x) = -2x^2 + x$, $I = (1; +\infty)$;
b) $g(x) = \frac{1}{x+2}$, $I = (0; +\infty)$;
c) $g(x) = \frac{1}{x^2}$, $I = (1; +\infty)$;
d) $g(x) = 3^{-x}$, $I = (-\infty; +\infty)$.

31. Šildomo vandens temperatūros kitimą iki užvirimo apytiksliai nusako kvadratinė funkcija $T(t) = at^2 + bt + c$, čia t — laikas, prabėgęs nuo šildymo pradžios, minutėmis. Pradžioje vandens temperatūra buvo 10 °C. Vanduo užvirė po 20 minučių.
1. Parodykite, kad vandens temperatūrą momentu t nusako funkcija
   $T(t) = -\frac{9}{40}t^2 + 9t + 10$, $0 \leqslant t \leqslant 20$.
2. Apskaičiuokite, kaip pakito vandens temperatūra:
   a) nuo 3 iki 4 minutės;
   b) nuo 10 iki 11 minutės;
   c) nuo 19 iki 20 minutės.

32. Apskaičiuokite santykį $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, kai:

a) $f(x) = 2x^2 + 1$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}1$;
b) $f(x) = 3x^2 - 2x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = -0{,}1$;
c) $f(x) = \frac{2x}{x+1}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = -0{,}5$;
d) $f(x) = \frac{x}{1-2x}$, $x_0 = 0$, $\Delta x = -0{,}1$;
e) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$, $x_0 = 0$, $\Delta x = 0{,}5$;
f) $f(x) = \frac{2x-4}{x^2+2}$, $x_0 = 0$, $\Delta x = -0{,}5$.

33. Duota funkcija $f(x) = (x+1)^2$ ir tiesė:

a) $y = 2x + 1$; b) $y = 6x - 3$;

c) $y = x - 1$; d) $y = 4x + 4$;

e) $y = -2x + 1$; f) $y = -x + 1$.

1. Raskite funkcijos $f(x)$ grafiko ir tiesės bendrus taškus.
2. Ištirkite, ar tai kirtimosi, ar lietimosi taškai.

34. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką. Ar turi funkcijos grafikas liestinę taške x_0?

a) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kai } x < 0, \\ -x, & \text{kai } x \geqslant 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$;

b) $f(x) = |x^2 - x|$, $x_0 = 1$;

c) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{kai } x \leqslant 1, \\ \frac{1}{x}, & \text{kai } x > 1, \end{cases}$ $x_0 = 1$;

d) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kai } x \leqslant 0, \\ x, & \text{kai } x > 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

35. Duota funkcija $f(x) = x^2 - 4x$ bei taškai A ir B:

a) $A(2; -4)$, $B(4; 0)$; b) $A(2; -4)$, $B(3; -3)$;

c) $A(0; 0)$, $B(2; -4)$; d) $A(-1; 5)$, $B(2; -4)$.

1. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką ir kirstinę, einančią per taškus A ir B.
2. Parašykite kirstinės AB lygtį.
3. Naudodamiesi skaičiuokliu, minutės tikslumu apskaičiuokite kampą, kurį kirstinė AB sudaro su Ox ašimi.
4. Pasitikrinkite, ar skaičiavimų rezultatai bent apytiksliai sutampa su liestinės ir Ox kampo dydžiu brėžinyje.

Priminimas. Tiesės, nubrėžtos per taškus $A(x_1; y_1)$ ir $B(x_2; y_2)$, lygtis užrašoma taip: $y - y_1 = k(x - x_1)$, čia $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ — tiesės krypties koeficientas.

---

36. Duota funkcija $f(x) = -\frac{1}{x}$. Parinkti tokie jos grafiko taškai: $M_0(1; -1)$, $M_1\left(2; -\frac{1}{2}\right)$, $M_2\left(3; -\frac{1}{3}\right)$, $M_3\left(4; -\frac{1}{4}\right)$, $M_4\left(5; -\frac{1}{5}\right)$.

a) Raskite kirstinių M_0M_4, M_0M_3, M_0M_2, M_0M_1 krypčių koeficientus.

b) Skaičiuokliu laipsnio tikslumu apskaičiuokite kampus, kuriuos šios kirstinės sudaro su Ox ašimi.

c) Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką ir kirstines.

d) Raskite funkcijos grafiko liestinės taške $(1; 1)$ lygtį. Kokį kampą ji sudaro su Ox ašimi?

37. Raskite kampą, kurį su Ox ašimi sudaro funkcijos $f(x)$ grafiko liestinė taške x_0:

a) $f(x) = 2x^2 + x$, $x_0 = 2$; b) $f(x) = -x^2 + 2x$, $x_0 = 3$;

c) $f(x) = \frac{x^2}{2} + x\sqrt{3}$, $x_0 = 0$; d) $f(x) = 2x - x^2$, $x_0 = \frac{3}{2}$.

38. Apskaičiuokite $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, kai:

a) $f(x) = 2x^2 + 3$, $x_0 = 0$;
b) $f(x) = 3x^2 - 3$, $x_0 = 1$;
c) $f(x) = -2x^2 + x$, $x_0 = 1$;
d) $f(x) = -3x^2 + 4$, $x_0 = 0$;
e) $f(x) = \frac{2}{x+1}$, $x_0 = 1$;
f) $f(x) = \frac{1}{2x+2}$, $x_0 = 1$;
g) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $x_0 = 0$;
h) $f(x) = \frac{2}{x^2+2}$, $x_0 = 0$.

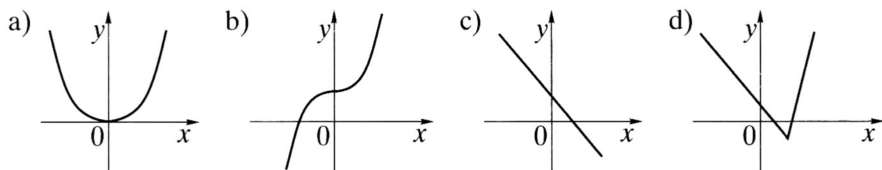
39. Remdamiesi apibrėžimu, raskite $f'(x_0)$, kai:

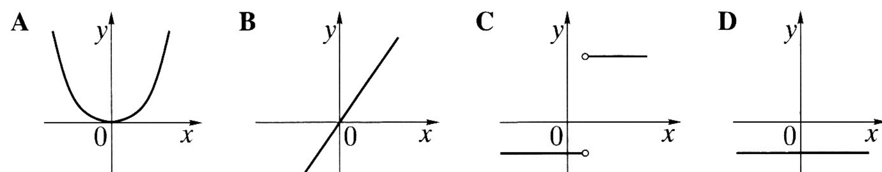
a) $f(x) = 3x + 5$, $x_0 = 2$;
b) $f(x) = x^2 - 3x$, $x_0 = -2$;
c) $f(x) = (2x - 3)^2$, $x_0 = 0$;
d) $f(x) = \frac{1}{x-3}$, $x_0 = 2$;
e) $f(x) = \frac{3}{2-x}$, $x_0 = 1$;
f) $f(x) = \frac{x+3}{2x-1}$, $x_0 = 2$;
g) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $x_0 = 3$;
h) $f(x) = \sqrt{3x-2}$, $x_0 = 1$.

40. Remdamiesi funkcijos išvestinės apibrėžimu, raskite $f'(x)$, kai:

a) $f(x) = 4x + 5$;
b) $f(x) = 4x^2 - 1$;
c) $f(x) = \frac{3}{x+3}$;
d) $f(x) = \frac{2}{2x+2}$;
e) $f(x) = \sqrt{3x-1}$;
f) $f(x) = \sqrt{3-2x}$.

41. Duoti keturių funkcijų ir jų išvestinių grafikai. „Suporuokite“ grafikus, kad kiekvieną porą sudarytų funkcijos ir jos išvestinės grafikai.





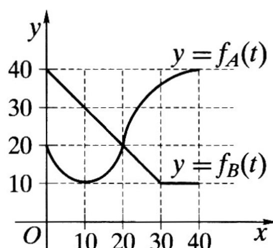
42. Įrodykite, kad nelyginės diferencijuojamos funkcijos išvestinė yra lyginė.

43. Įrodykite, kad lyginės diferencijuojamos funkcijos išvestinė yra nelyginė.

44. Įrodykite, kad diferencijuojamos periodinės funkcijos išvestinė yra periodinė ir turi tą patį periodą.

45. Diferencijuojama funkcija tenkina sąlygą $f(0) = 0$.
Įrodykite, kad tada $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$.

46. Du materialieji taškai A ir B juda Oy ašyje. Taškų padėtis nusako pateikti funkcijų $y = f_A(t)$ ir $y = f_B(t)$ grafikai (laikas matuojamas sekundėmis, atstumas — metrais).



Iš grafiko nustatykite:
a) kada taškai A ir B buvo daugiausiai nutolę nuo koordinačių pradžios taško;
b) kada abu taškai buvo susitikę;
c) kokie buvo taškų greičiai momentais $t = 10$, $t = 40$;
d) kada taško A greitis buvo didžiausias;
e) kaip judėjo taškas A.

47. Materialusis taškas juda tiese pagal dėsnį $s(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 10t$ (m) (t matuojamas sekundėmis).
a) Raskite laiko momentą, kai taško greitis bus lygus 5 m/s, 0 m/s.
b) Raskite taško pagreitį.
c) Kada taško greitis buvo didžiausias?

48. Raskite daugianario išvestinę:
a) $p(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 1$;
b) $p(x) = 5x^3 - 6x^2 + x - 2$;
c) $p(x) = 9x^3 - 4x^2 + 2x + 1$;
d) $p(x) = 4x^6 - 3x^5 - 7x^2 + 8$;
e) $p(x) = 4x^7 - 9x^3 + x^2 - 18$.

49. Raskite daugianario išvestinės reikšmę nurodytame taške, kai:
a) $p(x) = 4x^5 - 5x^4 + 6x^3 - 18x$, $x_0 = 1$;
b) $p(x) = 3x^6 - 5x^4 + 2x^3 - 10$, $x_0 = 0$;
c) $p(x) = 4x^6 + 6x^3 - 20x^2 + 8x$, $x_0 = -1$;
d) $p(x) = 6x^5 - 20x^4 + 15x^3 - 20x$, $x_0 = 1$;
e) $p(x) = 3x^6 - 10x^5 + 8x^4 - 15$, $x_0 = 0$;
f) $p(x) = 8x^5 - 7x^4 + 6x^3 - 12x^2$, $x_0 = 1$;
g) $p(x) = 7x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 7x^2$, $x_0 = -1$.

50. Su kuriomis argumento x reikšmėmis teisinga lygybė $f'(x) = g'(x)$, kai:
a) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 9x - 3$ ir $g(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 5x + 7$;
b) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 10$ ir $g(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^2}{2} - 5x + 9$?

51. Išspręskite nelygybę $f'(x) < g'(x)$, kai:
a) $f(x) = 5x + 3$, $g(x) = 2x\left(x + \frac{1}{2}\right)$;
b) $f(x) = 4x - 5$, $g(x) = \frac{1}{2}x(2 - 6x)$.

52. Patikrinkite, ar teisinga nelygybė $f'(0) < g'(0)$, kai:
a) $f(x) = x^2 - 6x$, $g(x) = x^2\left(\frac{1}{3}x - \frac{3}{2}\right)$;
b) $f(x) = x^2\left(\frac{1}{3}x + \frac{3}{2}\right)$, $g(x) = x^2 + 3x$.

53. Raskite lygtį liestinės, nubrėžtos per funkcijos $f(x)$ grafiko tašką $M(x_0; y_0)$:
a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, $M(0; 2)$; b) $f(x) = (x-2)^2(x+1)$, $M(1; 2)$;
c) $f(x) = 2x^4 - x^3 + 1$, $M(-1; 4)$; d) $f(x) = (x-4)^3(2x+1)$, $M(2; -40)$.

54. Raskite tuos funkcijos $y = f(x)$ grafiko taškus, kuriuose liestinė yra lygiagreti duotai tiesei:
a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $y = 3x$; b) $f(x) = x^3 + x - 2$, $y = 4x + 5$;
*c) $f(x) = x^2(x-2)^2$, $y = 24x - 1$.

55. Įrodykite, kad funkcijos
a) $y = x^5 + 8x + 1$; b) $y = 2x^5 + x^3$
grafiko bet kurio taško liestinė su Ox ašimi sudaro smailų kampą.

56. Su kuriomis p ir q reikšmėmis tiesė $y = 3x - 2$ liečia parabolę $y = x^2 + px + q$ taške, kurio abscisė lygi 0?

57. Su kuriomis p ir q reikšmėmis tiesės $y = 5x + 1$ ir $y = -x - 2$ yra parabolės $y = x^2 + px + q$ liestinės?

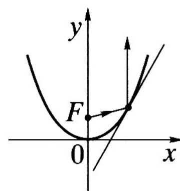
58. Įrodykite, kad bet kuri parabolės $y = x^2$ liestinė kerta tieses $y = \frac{1}{4}$ ir $y = -\frac{1}{4}$ taškuose, vienodai nutolusiuose nuo taško $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$.

59. Įrodykite, kad jei dvi parabolės $y = x^2$ liestinės yra statmenos, tai jų susikirtimo taškas yra tiesėje $y = -\frac{1}{4}$.

60. Įrodykite, kad kvadratinės funkcijos grafiko dvi liestinės kertasi taške, kurio abscisė lygi lietimosi taškų abscisių aritmetiniam vidurkiui.

61. Raskite parabolės $y = x^2$ liestinių, nubrėžtų per tašką $A(2; 3)$, lygtis.

***62.** Įrodykite, kad bet kuri parabolės $y = x^2$ liestinė sudaro lygius kampus su dviem tiesėmis: viena jų lygiagreti ordinačių ašiai ir eina per lietimosi tašką, o kita — eina per lietimosi tašką ir tašką $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$.

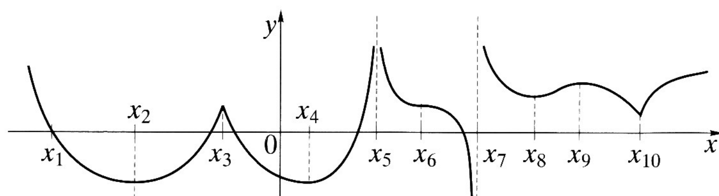


Šia parabolės savybe pagrįstas parabolinių prožektorių, teleskopų, antenų ir kitų prietaisų veikimas: spinduliai iš šviesos šaltinio, esančio taške $F\left(0; \frac{1}{4}\right)$, atsispindėję nuo parabolės sklinda lygiagrečiai Oy ašiai.

Patarimas. Kampo tarp nestatmenų tiesių su krypčių koeficientais k_1 ir k_2 tangentą galima apskaičiuoti taip:
$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|$.

1.2. IŠVESTINIŲ TAIKYMAS FUNKCIJOMS TIRTI

63. Brėžinyje pavaizduotas funkcijos grafikas.



a) Kuriuose iš pažymėtų taškų $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ funkcija įgyja minimumus?
b) Kuriuose taškuose funkcija įgyja maksimumus?
c) Kuriuose intervaluose funkcijos reikšmės didėja?
d) Kuriuose intervaluose funkcijos reikšmės mažėja?

64. a) Ar gali tos pačios funkcijos maksimumas būti mažesnis už minimumą? Pateikite įvairių funkcijų grafikų pavyzdžių.
b) Ar gali funkcija turėti kelis maksimumus ir nė vieno minimumo? O kelis minimumus ir nė vieno maksimumo? Pateikite pavyzdžių.

65. Įrodykite teiginius:
a) jei funkcija $f(x)$ taške x_0 turi minimumą, tai funkcija $g(x) = -f(x)$ tame taške turi maksimumą;
b) jei intervale $(a; b)$ funkcijos reikšmės didėja, tai tame pačiame intervale funkcijos $g(x) = -f(x)$ reikšmės mažėja.

66. Sakykime, kad intervale $(a; b)$ funkcijos $f(x)$ reikšmės didėja. Kaip elgiasi intervale $(-b; -a)$ funkcijos $g(x) = f(-x)$ reikšmės?

67. Sakykime, kad funkcijos $f(x)$ reikšmės didėja (mažėja) intervaluose I_1 ir I_2.
1. Tegu $I_1 \cap I_2 = \varnothing$. Ar teisinga tvirtinti, kad funkcijos $f(x)$ reikšmės didėja (mažėja) aibėje $I_1 \cup I_2$?
Nubraižykite grafiką, išnagrinėkite funkcijos reikšmių didėjimą nurodytuose intervaluose:

a) $f(x) = 2x$, $I_1 = (-\infty; 0)$, $I_2 = (2; +\infty)$;
b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $I_1 = (-\infty; 0)$, $I_2 = (0; +\infty)$;
c) $f(x) = x^3$, $I_1 = (-\infty; 0)$, $I_2 = (0; +\infty)$;
d) $f(x) = \sin x$, $I_1 = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $I_2 = \left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$;
e) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $I_1 = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $I_2 = \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$.

2. Tegu dabar $I_1 \cap I_2 \neq \varnothing$. Ar teiginys, kad funkcijos $f(x)$ reikšmės didėja (mažėja) intervale $I = I_1 \cup I_2$, teisingas?

68. Duota nelyginė funkcija $f(x)$, savo vienintelį minimumą, lygų -5, įgyjanti taške $x = 3$.
1. Kaip reikia transformuoti funkcijos $f(x)$ grafiką, norint gauti grafiką funkcijos $g(x) = 2 - f(x + 2)$?
2. Ar funkcija $g(x)$ lyginė, ar nelyginė?

3. Kuriuose taškuose funkcija $g(x)$ įgyja savo ekstremumus?
4. Raskite funkcijos $g(x)$ ekstremumus.

69. Raskite funkcijos $f(x)$ reikšmių mažėjimo intervalą. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką:

a) $f(x) = x^2 - 6x + 3$; b) $f(x) = x^2 + 8x - 9$;
c) $f(x) = -x^2 - 2x + 10$; d) $f(x) = -x^2 + 4x - 7$;
e) $f(x) = 2x^2 - 6x + 8$; f) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 1$.

70. Raskite funkcijos $f(x)$ reikšmių didėjimo intervalą. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką:

a) $f(x) = x^2 + 8x - 2$; b) $f(x) = -x^2 + 6x + 7$;
c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2$; d) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3$;
e) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$; f) $f(x) = -9x^2 - 18x - 9$.

71. Raskite funkcijos $f(x)$ reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & \text{kai } x < 3, \\ 3 - x, & \text{kai } x \geqslant 3; \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x + 4, & \text{kai } x > -4, \\ -x, & \text{kai } x \leqslant -4; \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, & \text{kai } x < 0, \\ -x^2 + 2x + 2, & \text{kai } x \geqslant 0; \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x - 2, & \text{kai } x < 0, \\ x^2 - 4x - 2, & \text{kai } x \geqslant 0. \end{cases}$

72. Įsitikinkite, kad teisingi teiginiai:

a) jei lyginės funkcijos reikšmės didėja intervale $(a; b)$, tai koordinačių pradžios taškui simetriškame intervale $(-b; -a)$ tos funkcijos reikšmės mažėja. Ir atvirkščiai — jei intervale $(a; b)$ lyginės funkcijos reikšmės mažėja, tai intervale $(-b; -a)$ didėja.

b) jei nelyginės funkcijos reikšmės didėja intervale $(a; b)$, tai koordinačių pradžios taškui simetriškame intervale $(-b; -a)$ jos taip pat didėja. O jei intervale $(a; b)$ mažėja, tai ir intervale $(-b; -a)$ mažėja.

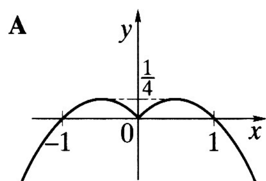
73. Išsiblaškęs dvyliktokas nubraižė dviejų funkcijų

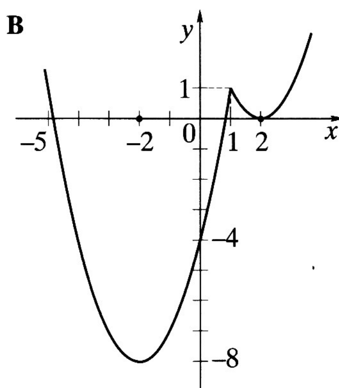
$$f(x) = x^2 - 4|x - 1| = \begin{cases} x^2 + 4x - 4, & \text{kai } x < 1, \\ x^2 - 4x + 4, & \text{kai } x \geqslant 1, \end{cases}$$

ir

$$g(x) = -x^2 + |x| = \begin{cases} -x^2 - x, & \text{kai } x < 0, \\ -x^2 + x, & \text{kai } x \geqslant 0, \end{cases}$$

grafikus, bet jų nepažymėjo:





a) Kuriame brėžinyje yra funkcijos $f(x)$, o kuriame — funkcijos $g(x)$ grafikas?
b) Kur tų funkcijų reikšmės didėja ir kur mažėja?

74. Raskite funkcijos reikšmių mažėjimo intervalus. Nubraižykite funkcijos grafiką:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - |x|$; b) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + |x|$;
c) $f(x) = x^2 - 4|x| + 1$; d) $f(x) = -x^2 + 6|x| - 3$.

75. Įrodykite, kad:

a) funkcijos $f(x) = \left|\frac{1}{2}x^2 - |x|\right|$ reikšmės mažėja intervaluose $(-\infty; -2)$, $(-1; 0)$ ir $(1; 2)$;
b) funkcijos $f(x) = |x - 4| - x^2$ reikšmės didėja intervale $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$;
c) funkcijos $f(x) = \left||x - 4| - x^2\right|$ reikšmės didėja intervaluose $\left(-\frac{1+\sqrt{17}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ ir $\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; +\infty\right)$.

76. Raskite intervalus, kuriuose funkcijos $f(x)$ reikšmės mažėja:

a) $f(x) = 2x^3 + 6x^2$; b) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 15$;
c) $f(x) = x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2$; d) $f(x) = x^5 - 20x^3 + 1$.

77. Raskite intervalus, kuriuose funkcijos $f(x)$ reikšmės didėja:

a) $f(x) = -3x^3 - 2x^2$; b) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 4$;
c) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 7$; d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 6$.

78. Įrodykite, kad funkcijos $g(x)$ reikšmės didėja visoje realiųjų skaičių aibėje $\boldsymbol{R}$:

a) $g(x) = x^3 + x - 100$; b) $g(x) = x^5 + x^3 + 2x + 1$;
c) $g(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{4}{3}x^3 + 4x - 6$; d) $g(x) = x^7 + 2x^5 + 3x^3 + 5x$.

79. Įrodykite, kad funkcijos $g(x)$ reikšmės mažėja visoje realiųjų skaičių aibėje $\boldsymbol{R}$:

a) $g(x) = -x^3 - x + 9$; b) $g(x) = -x^5 - x^3 - x$;
c) $g(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 - x + 17$; d) $g(x) = -\frac{x^5}{5} + 2x^3 - 9x - 7$.

80. Raskite funkcijos $f(x)$ reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus:

a) $f(x) = 3x - x^3$;
b) $f(x) = -x^3 + 12x - 2$;
c) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 4$;
d) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$;
e) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x - 2$;
f) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$;
g) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + 1$;
h) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$;
i) $f(x) = 3x^5 - 10x^3 - 7$;
j) $f(x) = x^6 - 12x^3 + 2$.

81. Jei funkcija $f(x)$ diferencijuojama intervale $[x_0; x_0 + \Delta x]$ $(\Delta x > 0)$, tai pagal Lagranžo teoremą

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(c)\Delta x, \quad c \in (x_0; x_0 + \Delta x).$$

Kai Δx mažas, c ir x_0 skiriasi mažai. Pakeitę šioje lygybėje c į x_0, gauname apytikslę formulę

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x \quad \text{arba} \quad f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

1. Patyrinėkite gautos formulės geometrinę prasmę. Atkreipkite dėmesį — ji primena liestinės lygtį!
2. Remdamiesi šia formule, apytiksliai apskaičiuokite:
   a) $2{,}01^3$; b) $9{,}998^8$; c) $\sqrt{1{,}04}$; d) $\frac{2}{1{,}002}$.
3. Gautą atsakymą palyginkite su atsakymu, gautu apskaičiavus skaičiuokliu.

Ši formulė labai daug padėdavo skaičiavimuose, kol nebuvo šiuolaikinių kompiuterių, skaičiuoklių. Tačiau ir dabarties skaičiavimo įrenginių algoritmai remiasi panašiomis formulėmis.

82. Parabolėje $y = x^2$ parinkti du taškai su abscisėmis $x_1 = a$, $x_2 = 3a$ $(a \neq 0)$. Per šiuos taškus nubrėžta parabolės kirstinė. Kurio parabolės taško liestinė lygiagreti nubrėžtai kirstinei?

83. Raskite funkcijos $f(x)$ kritinius taškus:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 2$;
b) $f(x) = -x^2 + 6x + 7$;
c) $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$;
d) $f(x) = -3x^2 - 6x + 1$;
e) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 7$;
f) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 19$;
g) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 17$;
h) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 13$;
i) $f(x) = (x + 2)^2(3x - 1)$;
j) $f(x) = x^4 + 6x^2 + 5$;
k) $f(x) = x^4 + 8x^2 - 64x + 1$.

84. Įrodykite, kad:

a) tiesinė funkcija $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, kritinių taškų neturi;
b) kvadratinė funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, turi vienintelį kritinį tašką $x = -\frac{b}{2a}$.

85. Raskite funkcijos $g(x)$ kritinius taškus:

a) $g(x) = |2x - 1|$; b) $g(x) = |x + 1| + x + 1$;
c) $g(x) = |x + 1| + |x - 1|$; d) $g(x) = |x - 3| - |x + 3|$.

86. Raskite funkcijos $g(x)$ kritinius taškus:

a) $g(x) = x^2 - |x|$; b) $g(x) = -2x^2 + |x + 3|$;
c) $g(x) = |x^2 - 7x + 12|$; d) $g(x) = -|2x - x^2|$;
e) $g(x) = x|2 - x|$; f) $g(x) = (x - 5)|x - 1|$;
*g) $g(x) = |x^2 - 4| + |x + 3|$; *h) $g(x) = |x^2 - 1| + |x^2 - 3|$;
i) $g(x) = x^3 + 3|x|$; j) $g(x) = |x^3| - 9x$;
k) $g(x) = x^4 + 8|x^3|$; l) $g(x) = -x^4 + 4|x|$.

87. Su kuriomis a reikšmėmis funkcija $f(x)$ turi vienintelį kritinį tašką:

a) $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 27x + 5$; b) $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 75x - 13$?

88. Raskite funkcijos $f(x)$ maksimumo ir minimumo taškus:

a) $f(x) = x^2 - 2x$; b) $f(x) = -x^2 + 6x - 8$;
c) $f(x) = -x^3 + 12x + 3$; d) $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 5$;
e) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$; f) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 7$.

89. Raskite funkcijos $f(x)$ ekstremumų taškus. Nubraižykite funkcijos grafiką:

a) $f(x) = 2x|x|$; b) $f(x) = (x - 2)|x + 1|$;
c) $f(x) = x^2 + 3|x| + 2$; d) $f(x) = x^2 - |x - 1| + 3$;
e) $f(x) = \left|x^2 - 6|x| + 8\right|$; f) $f(x) = \left|x^2 - 8|x| + 12\right|$;
*g) $f(x) = |x^2 - 1| - |x^2 - 4|$; *h) $f(x) = |x^2 - 4| + |x^2 - 25|$.

90. Raskite funkcijos $g(x)$ ekstremumų taškus. Nubraižykite funkcijos grafiką:

a) $g(x) = |2x - 6|$; b) $g(x) = 2 - |x - 3|$;
c) $g(x) = |x - 3| + |2x + 1| - 3$; d) $g(x) = |x - 3| - |2x + 1|$.

91. Raskite k reikšmes, su kuriomis taške $x = 2$ įgyja maksimumą funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{kai } x < 2, \\ k, & \text{kai } x = 2, \\ 5 - k, & \text{kai } x > 2. \end{cases}$$

92. Raskite funkcijos $f(x)$ ekstremumus:

a) $f(x) = 3x - 2$; b) $f(x) = -x^2 + 8x$;
c) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$; d) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 1$;
e) $f(x) = -2x^2 + 8x - 3$; f) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$;
g) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 3$; h) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$;
i) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 5$; j) $f(x) = 4x^3 + 21x^2 - 24x + 8$;
k) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 6x + 8$; l) $f(x) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$.

93. Raskite funkcijos $f(x)$ reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus, ekstremumus:

a) $f(x) = -2x^4 - 8x^2 + 9$; b) $f(x) = 2x^4 + 8x^2 + 1$;

c) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{5}{3}x^3 + 2x^2$; d) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 5$.

94. Raskite funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalus, ekstremumus:

a) $f(x) = 6x^5 - 10x^3$; b) $f(x) = 5x^3 - 3x^5$.

95. Raskite argumento x reikšmę, su kuria funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ reikšmės skiriasi mažiausiai. Raskite tą mažiausią reikšmių skirtumą:

a) $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 + x$, $g(x) = x^4 + 3x^3 - 5x^2 + x - 3$;

b) $f(x) = 2x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 2x + 7$, $g(x) = x^4 + 5x^3 - 8x^2 - 2x + 2$.

96. Su kuriomis a reikšmėmis funkcija $f(x) = ax^3 + (a^2 - 1)x^2 - 7x - 3$ įgyja maksimumą taške $x = 1$?

97. Su kuriomis a reikšmėmis funkcija $f(x) = ax^3 - 3x^2 + 9x - 1$ intervale $(1; 2)$ turi vienintelį ekstremumą — maksimumą?

98. Materialusis taškas juda tiesėje pagal dėsnį

$s(t) = 5t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$

(laikas matuojamas sekundėmis, nueitas kelias — metrais).

a) Kada taško greitis bus didžiausias?

b) Kokį didžiausią greitį taškas įgyja?

99. Kūno greitis kito pagal dėsnį

$v(t) = 36t - 6t^2$ (cm/s).

Nustatykite:

a) kada kūno greitis buvo lygus nuliui;

b) kada judėjimo greitis buvo didžiausias ir koks.

100. Materialusis taškas juda tiese (nueitas kelias matuojamas metrais, laikas — sekundėmis) pagal dėsnį:

a) $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 + 5t$;

b) $s(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{7}{2}t^2 - t$.

Raskite:

1) laiko momentą t_0, kai taško pagreitis lygus 0;

2) greitį, kuriuo juda taškas momentu t_0.

101. Kūnas, paleistas iš aukščio h_0 vertikaliai aukštyn pradiniu greičiu v_0, juda pagal dėsnį

$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ (m),

čia $h(t)$ reiškia kūno aukštį virš Žemės paviršiaus laiko momentu t. Raskite aukštį, į kurį pakilo kūnas laiko momentu, kai jo greitis buvo k kartų mažesnis už pradinį, jeigu:

a) $k = 2$, $h_0 = 4$ m, $v_0 = 3$ m/s;

b) $k = 3$, $h_0 = 2$ m, $v_0 = 4$ m/s.

Skaičiuodami imkite $g = 10$ m/s^2.

1.3. FUNKCIJŲ IŠVESTINIŲ SKAIČIAVIMO TAISYKLĖS

102. Jau įrodėme formules:
$x' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(x^3)' = 3x^2$, $(x^4)' = 4x^3$, $(x^5)' = 5x^4$.
Įrodykite, kad:
a) $(x^6)' = 6x^5$; b) $(x^7)' = 7x^6$; c) $(x^8)' = 8x^7$; d) $(x^9)' = 9x^8$.

Patarimas. Užrašykite, pavyzdžiui, $x^6 = x \cdot x^5$, o tada remkitės funkcijų sandaugos išvestinės skaičiavimo taisykle.

---

103. Apskaičiuokite funkcijos $g(x)$ išvestinę:
a) $g(x) = (2x^2 - 8x + 1) \cdot (x^2 + 4x - 3)$;
b) $g(x) = (3x^2 - 6x + 2) \cdot (4x^2 + 8x + 1)$;
c) $g(x) = (x^3 - 3x^2 + 6x) \cdot (x^3 + 6x - 2)$;
d) $g(x) = (x^3 + 6x^2 + 3) \cdot (x^3 + 3x + 1)$.

104. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę:
a) $f(x) = \sqrt{x}(x^3 - 6)$; b) $f(x) = \sqrt{x}(2x^3 - 9x + 1)$;
c) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}(x^2 - 2x - 2)$; d) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}(x^2 + 4x - 1)$;
e) $f(x) = \sqrt{3}(x^2 - 2)(x^3 - x + 1)$; f) $f(x) = \sqrt{2}(x^2 - 3)(x^3 + x - 2)$.

105. Raskite $g'(0)$, jei:
a) $g(x) = \frac{x+2}{x-1}$; b) $g(x) = \frac{x+3}{x-2}$; c) $g(x) = \frac{x^2-3x+1}{x+1}$;
d) $g(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-1}$; e) $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$; f) $g(x) = \frac{2x}{x^2+2}$.

106. Apskaičiuokite $f'(1)$, kai:
a) $f(x) = (x^4 - 9x)(x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 1)$;
b) $f(x) = (3x^3 - 1)(2x^5 - 4x^4 + 3x - 2)$;
c) $f(x) = (x^5 + 3x)(x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 2)$;
d) $f(x) = (x^5 - 2x)(x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 5)$.

107. Įsitikinkite, kad:
a) $\left(\frac{x-3}{x+1}\right)' = -4\left(\frac{x+2}{x+1}\right)'$; b) $3\left(\frac{x+3}{x+2}\right)' = -\left(\frac{x-1}{x+2}\right)'$.

Pastebėjimas. Šias lygybes galima patikrinti net neskaičiuojant išvestinių!

---

108. Raskite $g(x) = f(3x - 1)$, jei:
a) $f(x) = 2x - 4$; b) $f(x) = -3x + 2$;
c) $f(x) = x^2 + x - 2$; d) $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$;
e) $f(x) = -3x^2 + 4x - 6$; f) $f(x) = -x^2 - 3x + 7$;
g) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 5$; h) $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 5x + 4$.

109. Raskite $g(x) = f(f(x))$, jei:

a) $f(x) = 2x^2 - 1$; b) $f(x) = 2 - x^2$;

c) $f(x) = x^2 - x$; d) $f(x) = x^2 + 2x$.

110. Įrodykite, kad $f(f(f(x))) = x^8 + 8x^6 + 28x^4 + 48x^2 + 38$, jei $f(x) = x^2 + 2$.

111. Duota funkcija $f(x)$:

a) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$; b) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$;

c) $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$; d) $f(x) = \frac{3x-2}{x-1}$.

1. Raskite funkcijos f apibrėžimo sritį D_f.
2. Raskite sudėtinės funkcijos $h(x) = f(f(x))$ išraišką.
3. Raskite funkcijos h apibrėžimo sritį D_h.

112. Įrodykite, kad funkcijai $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ teisinga lygybė $f(x) = f(f(f(x)))$.

113. Raskite $f(f(f(x)))$, jei $f(x) = x|x|$.

114. Duota funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x > 0, \\ -1, & \text{kai } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Raskite:

a) $f^2(x)$; b) $f(f(x))$;

c) $f\left(\frac{1}{f^2(x)}\right)$; d) $f(|x|)$;

e) $f\left(\frac{|x|}{x}\right)$; f) $f(x) - f(|x|)$;

g) $f(x - |x|)$; h) $f(x^2)$;

i) $f(x) + f(|x|)$; j) $f(x^3)$.

115. Patikrinkite, ar savo apibrėžimo srityje funkcija $g(x) = \cos x$ tenkina lygybę $g(2x) = 2g^2(x) - 1$.

116. Patikrinkite, ar savo apibrėžimo srityje funkcija $f(x) = \frac{3-x^4}{8x^2}$ tenkina lygybę $f(t) + 3f\left(\frac{1}{t}\right) = t^2$.

117. Įrodykite, kad aibėje $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ funkcija $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ tenkina lygybę $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + 3f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 2x$.

118. Raskite $f(x)$ išraišką, jei:

a) $f(3 - x) = 7 - 3x$; b) $f(2x + 1) = 4x + 5$;

c) $f(x - 3) = -3x^2 + 19x - 26$; d) $f(1 - 2x) = 8x^2 - 14x + 4$;

e) $f(2 - x) = -2x^3 + 9x^2 - 13x + 2$; f) $f(2x - 1) = 8x^3 - 4x^2 - 6x + 6$;

g) $f(2 - x) = \frac{x-4}{2x-3}$; h) $f(2x + 3) = \frac{4x+5}{2x}$.

119. Raskite sudėtinės funkcijos apibrėžimo sritį:

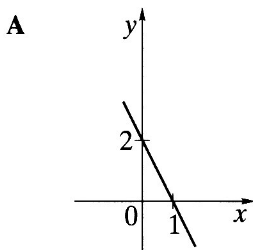
a) $f(x) = \lg\sqrt{16 - x^2}$; b) $f(x) = \sqrt{-\log_3(x - x^2)}$;

c) $f(x) = \sqrt{\lg(2 - \sqrt{x - 1})}$; d) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 16)}$.

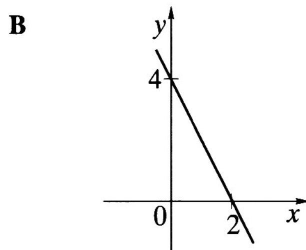
120. Mokinys braižė sudėtinių funkcijų $f(g(x))$ ir $g(f(x))$ grafikus, bet pamiršo užrašyti, kuris grafikas funkcijos $f(g(x))$, o kuris — $g(f(x))$. Padėkite jam susigaudyti.

a) $f(x) = 2 - x$, $g(x) = 2x$;

A

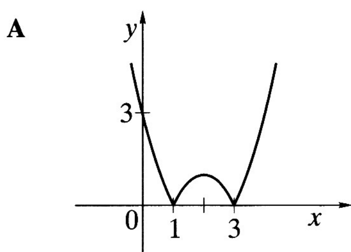


B

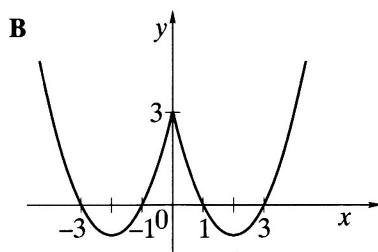


b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $g(x) = |x|$;

A

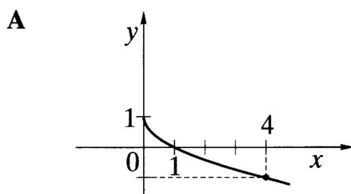


B

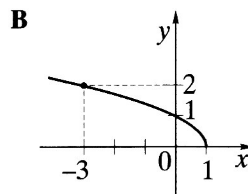


c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 1 - x$;

A

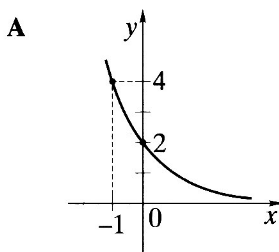


B

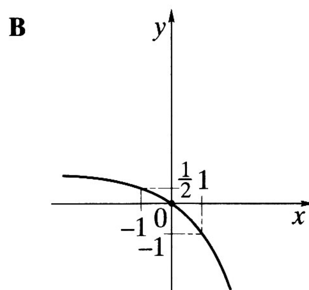


d) $f(x) = 2^x$, $g(x) = -x + 1$;

A

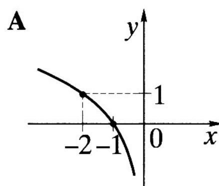


B

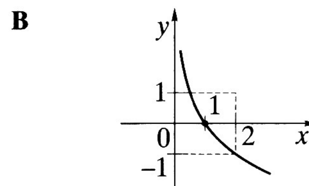


e) $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = -x$;

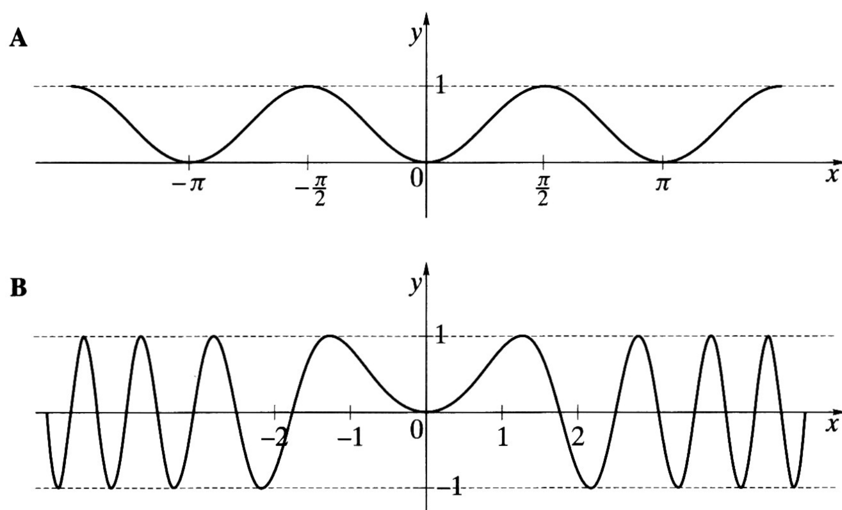
A



B



f) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2$.



121. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę:

a) $f(x) = (3x - 1)^8$;

b) $f(x) = (3 - 2x)^9$;

c) $f(x) = (x^2 - 5x - 9)^6$;

d) $f(x) = (3x^2 + 9x + 1)^7$;

e) $f(x) = \left(x^5 + 6x^3\right)^6$;

f) $f(x) = \left(x^6 - 7x^5\right)^4$.

122. Raskite funkcijos $g(x)$ išvestinę:

a) $g(x) = \sqrt{2x + 5}$;

b) $g(x) = \sqrt{3 - 4x}$;

c) $g(x) = \sqrt{2x^2 + 3}$;

d) $g(x) = \sqrt{2 - 3x - x^2}$;

e) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$;

f) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{5-3x}}$;

g) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2+3x}}$;

h) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{5-2x^2}}$.

123. Apskaičiuokite $f'(x_0)$:

a) $f(x) = (6x^3 - 7x^2)^4 + 3(2x - 1)^3$, $x_0 = 1$;

b) $f(x) = (4x^4 - 3x)^4 - 5(3x - 2)^3$, $x_0 = 1$;

c) $f(x) = (x^3 + 2x^2 + 3)^5 + (4x + 1)^4$, $x_0 = 0$;

d) $f(x) = (x^3 + 3x^2 - 5)^5 + (1 - 4x)^4$, $x_0 = 0$;

e) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2} - 4\sqrt{x + 3}$, $x_0 = 1$;

f) $f(x) = \sqrt{3 - 2x^2} - 4\sqrt{5 - x}$, $x_0 = 1$;

g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3x}} - \frac{5}{\sqrt{x+3}}$, $x_0 = 1$;

h) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2-x}} + \frac{8}{\sqrt{5-x}}$, $x_0 = 1$.

124. Parašykite funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės taške $x_0 = 0$ lygtį, kai:
a) $f(x) = (x^2 + 2x - 2)^3 - 22x$; b) $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^3 + 40x$.

125. Raskite funkcijos $g(x)$ grafiko tašką, kuriame liestinė lygiagreti tiesei $y = -x$, kai:
a) $g(x) = -\sqrt{2x - 1}$; b) $g(x) = \sqrt{3 - 2x}$.

126. Raskite funkcijos $h(x)$ grafiko taškus, kuriuose liestinė lygiagreti abscisių ašiai, kai:
a) $h(x) = x(x - 4)^3$; b) $h(x) = x^2(x - 2)^2$.

127. Raskite funkcijos $h(x)$ grafiko taškus, kuriuose liestinė statmena tiesei $y = 2x - 3$:
a) $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$; b) $h(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

128. Duota funkcija
$f(x) = \sqrt{2x - x^2}$.
1. Parašykite liestinės, nubrėžtos per funkcijos $f(x)$ grafiko tašką $A(x_0; f(x_0))$, lygtį.
2. Raskite tos liestinės ir Oy ašies susikirtimo tašką B.
3. Įrodykite, kad atstumai AB ir OB lygūs; O — koordinačių pradžios taškas.
4. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką ir liestinę.
5. Kokį jums jau žinomą geometrijos teiginį patikrinote?

129. Duota funkcija
$f(x) = \sqrt{x^2 - 5}$.
1. Parašykite funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės, nubrėžtos per tašką $M(3; 2)$, lygtį.
2. Raskite tos liestinės ir tiesių $y = x$, $y = -x$ susikirtimo taškus A ir B.
3. Raskite trikampio AOB plotą; O — koordinačių pradžios taškas.

130. Parašykite funkcijos $g(x)$ grafiko liestinės, nubrėžtos per tašką A, lygtį, kai:
a) $g(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$, $A(0; -1)$; b) $g(x) = \frac{x^2+2}{x+1}$, $A(0; 2)$;
c) $g(x) = \frac{x+1}{x^2}$, $A(1; 2)$; d) $g(x) = \frac{x-2}{x^2}$, $A(1; -1)$.

131. Raskite funkcijos $y = \frac{2x-2}{x+1}$ grafiko taškus, per kuriuos nubrėžtų liestinių krypties koeficientai lygūs 4.

132. Raskite funkcijos $y = \frac{x-1}{x+1}$ taškus, kuriuose liestinės:
a) lygiagrečios tiesei $y = 2x + 1$;
b) statmenos tiesei $y = -\frac{1}{8}x - 3$.

133. Raskite funkcijos $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ grafiko tašką, per kurį nubrėžta liestinė yra lygiagreti abscisių ašiai.

134. Duota funkcija
$f(x) = \frac{4}{3}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2$.
a) Raskite funkcijos grafiko tašką, kurio ordinatė lygi 0.
b) Raskite per šį tašką nubrėžtos funkcijos grafiko liestinės krypties koeficientą.

135. Raskite kampą tarp Ox ašies ir funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės taške x_0:
a) $f(x) = \frac{1-2x}{|x|}$, $x_0 = 3$; b) $f(x) = \frac{|x-1|}{|x+3|}$, $x_0 = -2$.

136. Užrašykite funkcijos $g(x)$ grafiko liestinės, nubrėžtos per tašką M, lygtį, kai:

a) $g(x) = \frac{x-3}{|x+2|}$, $M\left(0; -\frac{3}{2}\right)$; b) $g(x) = \frac{|x-2|}{2x+1}$, $M(0; 2)$.

137. Įrodykite, kad funkcijos $f(x) = x + \frac{1}{1+x^2}$ reikšmės didėja visoje jos apibrėžimo srityje.

138. Raskite $f'(0)$, jei:

a) $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot (x^2 + x - 1)$; b) $f(x) = \sqrt{1-x} \cdot (x^2 - x + 1)$;

c) $f(x) = \frac{\sqrt{2x+4}}{x+1}$; d) $f(x) = \frac{\sqrt{3x+4}}{x-1}$.

139. Raskite funkcijos $g(x)$ reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus, ekstremumus:

a) $g(x) = \frac{x-2}{(x-3)^2}$; b) $g(x) = \frac{x+1}{(x-2)^2}$.

140. Duotos funkcijos

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 2} \quad \text{ir} \quad g(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}.$$

1. Raskite funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ apibrėžimo sritis.
2. Raskite šių funkcijų išvestines.
3. Nustatykite šių funkcijų reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus.
4. Raskite ekstremumus.
5. Funkcijų vardikliuose išskirkite pilnąjį kvadratą. Įsitikinkite, kad taip ekstremumus galima rasti ir be išvestinių.
6. Raskite funkcijų kitimo sritis.
7. Nubraižykite funkcijų grafikus.

141. Įrodykite teiginį (beje, gana naudingą): jei funkcija $f(x)$ intervale I yra teigiama, tai jos maksimumo (arba minimumo) taškas, esantis tame intervale, sutampa su funkcijos $(f(x))^2$ maksimumo (arba minimumo) tašku. Išnagrinėkite, pavyzdžiui, funkcijas $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$.

142. Tiesėje raskite tašką, artimiausią taškui A, kai:

a) $y = 2x$, $A(3; 0)$; b) $y = 3x$, $A(2; 0)$.

143. Duota funkcija $f(x) = \sqrt{x}$.

1. Parodykite, kad atstumas tarp taško $A(1; 0)$ ir parabolės taško $M(x; \sqrt{x})$ išreiškiamas formule $d(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.
2. Parabolėje raskite tašką M_0, artimiausią taškui A.
3. Raskite atstumą AM_0.

144. Materialusis m masės taškas tiesėje Ox juda pagal dėsnį

$s(t) = \frac{1}{2t+1}$;

čia taško koordinatė (t) išreiškiama metrais, laikas — sekundėmis. Įrodykite, kad tašką veikianti jėga momentu t yra proporcinga $s^3(t)$.

Nurodymas. Remkitės antruoju Niutono dėsniu: $F = ma$.

1.4. TRIGONOMETRINIŲ FUNKCIJŲ IŠVESTINĖS

145. Raskite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo ir reikšmių sritis:

a) $f(x) = \sin(\pi x)$;
b) $f(x) = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$;
c) $f(x) = -\cos(2x - 7)$;
d) $f(x) = 2\sin(x^2 + 3x + 1)$;
e) $f(x) = 5\sin\frac{1}{x}$;
f) $f(x) = x + \sin x$;
g) $f(x) = 3\sin(2x) + 4\cos(2x)$;
h) $f(x) = 2\sin x - 3\cos x + 2$.

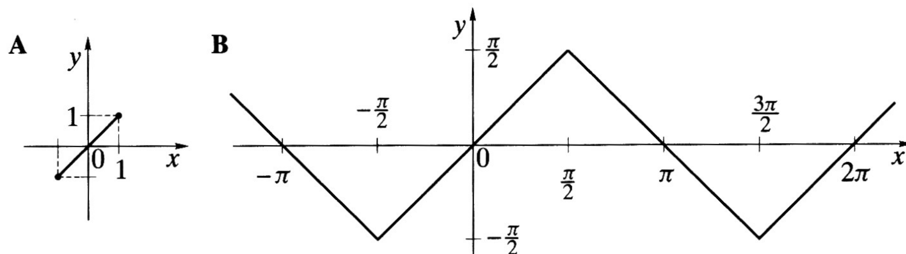
146. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką:

a) $f(x) = 2\sin x$;
b) $f(x) = \sin(3x)$;
c) $f(x) = \frac{1}{2}\cos x$;
d) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$.

147. Raskite funkcijos $f(x)$ mažiausią teigiamą periodą:

a) $f(x) = \sin(2x)$;
b) $f(x) = 4\sin(\pi x)$;
c) $f(x) = 3\cos(3x - 2)$;
d) $f(x) = \cos\frac{\pi x}{2}$;
e) $f(x) = |\sin x|$;
f) $f(x) = |\cos x|$.

148. Duoti dviejų funkcijų grafikai:



Kuris iš jų yra funkcijos $f(x) = \arcsin(\sin x)$, o kuris — $g(x) = \sin(\arcsin x)$?

149. Nubraižykite funkcijų $f(x) = \arccos(\cos x)$ ir $g(x) = \cos(\arccos x)$ grafikus.

150. Raskite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo ir reikšmių sritis:

a) $f(x) = 3\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2}$;
b) $f(x) = \mathrm{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$;
c) $f(x) = \sqrt{\mathrm{tg}\,x}$;
d) $f(x) = \sqrt[3]{\mathrm{ctg}\,x}$.

151. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką:

a) $f(x) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,x$;
b) $f(x) = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$;
c) $f(x) = 2\,\mathrm{ctg}\,x$;
d) $f(x) = \mathrm{ctg}(2x)$.

152. Raskite funkcijos $g(x)$ mažiausią teigiamą periodą:

a) $g(x) = \mathrm{tg}(2x)$;
b) $g(x) = 2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$;
c) $g(x) = 3\,\mathrm{ctg}(x + 1)$;
d) $g(x) = \mathrm{ctg}(\pi x - 1)$;
e) $g(x) = |\mathrm{tg}\,x|$;
f) $g(x) = |\mathrm{ctg}\,x|$.

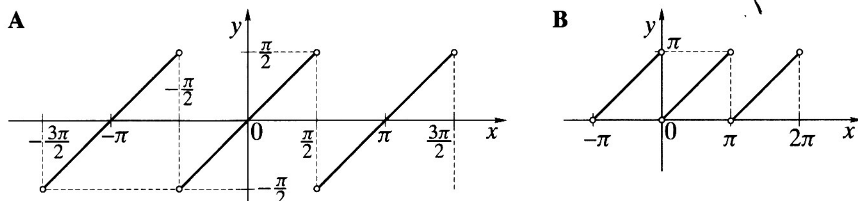
153. Nustatykite, ar funkcija yra lyginė, ar nelyginė:

a) $f(x) = \sin^2 x \cdot \cos x$; b) $f(x) = \cos^2 x \cdot \sin x$;

c) $f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x$; d) $f(x) = \operatorname{ctg} x + \sin x$;

e) $f(x) = \sin x + \cos x$; f) $f(x) = \operatorname{tg} x + \sin x^2$.

154. Duoti dviejų funkcijų grafikai:



Kuris iš jų yra funkcijos $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$, o kuris — $g(x) = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$?

155. Nubraižykite funkcijų $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)$ ir $g(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$ grafikus.

156. Koordinačių plokštumoje pavaizduokite taškus, kurių koordinatės x, y tenkina lygybę:

a) $|y| = \sin x$; b) $|y| = \operatorname{tg} x$; c) $|y| = |\sin x|$; d) $|y| = |\operatorname{tg} x|$.

157. Koordinačių plokštumoje pavaizduokite taškus, kurių koordinatės x, y tenkina nelygybę:

a) $y \geqslant |\sin x|$; b) $y \leqslant \operatorname{tg} x$.

158. Apskaičiuokite funkcijos ribą:

a) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} (\sin x - \sqrt{3} \cos x)$; b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \sin 2x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{1 - \cos^2 x}$; d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\cos x + \sin x}$;

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos x}$; f) $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos x}$.

159. Apskaičiuokite funkcijos ribą:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos x$; b) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} (\cos 2x + \sqrt{3} \operatorname{ctg} x)$;

c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{3} \sin x}{\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)}$; d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{ctg} x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2x}$.

160. Skaičiuokliu apskaičiuokite funkcijų $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ ir $g(z) = \frac{\operatorname{tg} z}{z}$ reikšmes 5 ženklų po kablelio tikslumu ir užpildykite lentelę. Atkreipkite dėmesį į funkcijų $f(z)$ ir $g(z)$ reikšmių kitimą, argumentui z artėjant prie 0.

z	0,5	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
$\frac{\sin z}{z}$						
$\frac{\operatorname{tg} z}{z}$						

Įrodykite, kad funkcijos $f(z)$ ir $g(z)$ yra lyginės.

161. Apskaičiuokite funkcijos ribą:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x^2}{x^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(2x)}{x^2}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(3x)}{x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg}^2 x \cdot \sin^2(3x)$; e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$; f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$;

g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos x-1}{2\sin x-\sqrt{3}}$; h) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \frac{2\cos x-\sqrt{3}}{2\sin x-1}$.

162. Remdamiesi išvestinės apibrėžimu apskaičiuokite funkcijos $f(x) = \operatorname{tg} x$ išvestinę taške 0:
1) sudarykite santykį $\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}$; 2) apskaičiuokite santykio ribą, kai $\Delta x \to 0$.

163. Remdamiesi išvestinės apibrėžimu apskaičiuokite funkcijų $f(x) = \operatorname{tg} x$ ir $g(x) = \operatorname{ctg} x$ išvestines bet kuriame apibrėžimo srities taške.

164. Apskaičiuokite funkcijos $f(x) = \cos x$ išvestinę, remdamiesi lygybe $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

165. Apskaičiuokite funkcijos $f(x) = \operatorname{ctg} x$ išvestinę, remdamiesi lygybe $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ir tangento išvestine.

166. Pertvarkę reiškinį, kuriuo apibrėžta funkcija, raskite jos išvestinę:

a) $g(x) = \sin(2x)\sin(3x) + \cos(2x)\cos(3x) - 1$;
b) $g(x) = \sin(2x)\cos(3x) + \cos(2x)\sin(3x) + 3$;
c) $g(x) = \frac{1+\cos(2x)}{\sin(\pi-2x)}$;
d) $g(x) = \frac{1-\cos(2x)+\sin(2x)}{1+\cos(2x)+\sin(2x)}$;
e) $g(x) = \frac{1+\sin(2x)+\cos(2x)}{1+\sin(2x)-\cos(2x)}$;
f) $g(x) = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$;
g) $g(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} + \frac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$;
h) $g(x) = \frac{\operatorname{tg}(2x)\cdot\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}(2x)-\operatorname{tg} x}$;
i) $g(x) = \frac{1}{1+\operatorname{ctg} x} - \frac{1}{1-\operatorname{ctg} x}$;
j) $g(x) = \frac{1+\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}$.

167. Įsitikinkite, kad $2f(x)\cdot f'(x) = f(2x)$, kai $f(x) = \sin x$ ir $2f(x)\cdot f'(x) = f'(2x)$, kai $f(x) = \cos x$.

168. Raskite funkcijos išvestinę:

a) $f(x) = \sin(5x)$; b) $f(x) = \sin^4 x$;
c) $f(x) = \sin^2(2x)$; d) $f(x) = \cos^2(3x)$;
e) $f(x) = x^4 \sin x$; f) $f(x) = x\sin(2x)$;
g) $f(x) = x\cos^2 x$; h) $f(x) = x^2\cos(2x)$.

169. Patikrinkite, ar funkcija $f(x) = \sin x - \cos x$ tenkina lygybes:
$f'(x) + f(x) = 2\sin x$, $f'(x) - f(x) = 2\cos x$.

170. Raskite funkcijos išvestinę:

a) $f(x) = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$; b) $f(x) = \frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4 x$;
c) $f(x) = x\operatorname{tg} x$; d) $f(x) = x\operatorname{tg}^2 x$;
e) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; f) $f(x) = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$.

171. Raskite $f'(x)$ reikšmių sritį, kai:

a) $f(x) = 5x - \sin(2x)$; b) $f(x) = \cos(3x) - 7x$;
c) $f(x) = 3\cos^2(4x+5)$; d) $f(x) = 4\sin^2(2x-3)$.

172. Su kuriomis x reikšmėmis teisinga lygybė $f'(x) = f'(0)$, kai $f(x) = 5\sin(2x) + 3\cos(2x)$?

173. Su kuriomis x reikšmėmis teisinga lygybė $f'(x)+f'(2x) = f'(0)$, kai $f(x) = \cos x$?

174. Diferencijuodami abi lygybės $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$ puses, įrodykite, kad yra teisinga formulė $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

175. Diferencijuodami abi lygybės $\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$ puses, įrodykite, kad yra teisinga formulė $\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

176. Įrodykite, kad funkcija $f(x)$ su visais x įgyja tą pačią pastovią reikšmę. Raskite ją:

a) $f(x) = \sin^2(2x) + \frac{1}{2}\cos(4x) + 2\sin^2 x + \cos(2x)$;
b) $f(x) = \cos^2 x + \cos^2(\alpha + x) - 2\cos\alpha\cos x\cos(\alpha + x)$, $\alpha \in \boldsymbol{R}$.

177. Apskaičiuokite:

a) $f'(0)$, kai $f(x) = (x^2 - 2x + 15)\cdot\sin(3x)$;
b) $f'(1)$, kai $f(x) = (x^3 - 1)\cdot\operatorname{tg}(\pi x)$;
c) $f'(2)$, kai $f(x) = (x^2 - x)\cdot\sin\frac{\pi x}{2}$;
d) $f'(1)$, kai $f(x) = x\sin(\pi x) + \cos\frac{\pi x}{2}$;
e) $f'(0)$, kai $f(x) = \cos(2x)\cdot\operatorname{tg}^2 x$;
f) $f'(1)$, kai $f(x) = \cos\frac{\pi x}{2}\cdot(\operatorname{tg}\pi x + 1)$;
g) $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, kai $f(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{6} + \frac{x^2}{\pi}$;
h) $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, kai $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos\frac{\pi}{6} + \frac{x^2}{\pi}$.

178. Raskite funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės taške x_0 lygtį, nubraižykite funkcijos grafiką ir grafiko liestinę nurodytame taške:

a) $f(x) = 3\sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; b) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;
c) $f(x) = \cos x - 1$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; d) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;
e) $f(x) = \operatorname{tg}(2x)$, $x_0 = \frac{\pi}{8}$; f) $f(x) = \sin(x+\pi) - 1$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;
g) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$; h) $f(x) = \operatorname{ctg}(\pi x)$, $x_0 = \frac{1}{2}$.

179. Kuriuose funkcijos $f(x)$ grafiko taškuose nubrėžta liestinė su Ox ašimi sudaro kampą α, kai:

a) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \cos x + x$, $\alpha = 45°$;
b) $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + 3\sin x + x$, $\alpha = 135°$?

180. Kokiais kampais funkcijų $f_n(x) = \sin(nx)$ grafikai kerta abscisių ašį koordinačių pradžios taške? Naudokitės skaičiuokliu. Kampus išreikškite laipsniais. Skaičiuokite minutės tikslumu. Baikite pildyti lentelę:

Funkcija	$\sin x$	$\sin(2x)$	$\sin(3x)$	$\sin(4x)$	$\sin(5x)$
Kampas				$75°58'$	

Ką galima būtų pasakyti apie funkcijas $g_n(x) = \mathrm{tg}(nx)$?

181. Kokiais kampais funkcijos $f(x)$ grafikas kerta abscisių ašį:
a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(3x)$; b) $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{3}} \cos(3x)$?

182. Raskite tokias x reikšmes, kad funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ grafikų liestinės taške x būtų lygiagrečios:
a) $f(x) = 3\cos(5x)$, $g(x) = 5\cos(3x) + 2$;
b) $f(x) = 2 - 14\sin(3x)$, $g(x) = 6\sin(7x)$.

183. Raskite taškus, kuriuose funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės yra lygiagrečios šios funkcijos grafiko liestinei taške x_0, kai:
a) $f(x) = \cos(7x) + 7\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$;
b) $f(x) = \sin(8x) + 4\sin(2x)$, $x_0 = \frac{\pi}{10}$.

184. Raskite funkcijos kritinius taškus:
a) $f(x) = 3\sin x + 2(x - 1)$;
b) $f(x) = 2\sin x + 3\cos x + 1$;
c) $f(x) = 3\cos(2x) - 5\sin(2x) + 4\cos 2$;
d) $f(x) = 3\sin(2x) + 5\cos(2x) + 3\cos 3$;
e) $f(x) = 4x - \sin(2x) + 4\sqrt{2}\cos x$;
f) $f(x) = 5x - \sin(2x) + 4\sqrt{3}\cos x$.

185. Įrodykite, kad funkcija $f(x) = \cos^2 x + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ įgyja vienintelę reikšmę. Raskite šią reikšmę.

186. Raskite funkcijos $f(x)$ kritinius taškus. Nubraižykite funkcijos grafiką:
a) $f(x) = |\sin x|$; b) $f(x) = |\mathrm{tg}\, x|$;
c) $f(x) = \sin|x|$; d) $f(x) = \mathrm{tg}\,|x|$.

187. Raskite funkcijos $f(x) = \cos(2x) \cdot \cos x$ maksimumus intervale $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$.

188. Raskite funkcijos $f(x) = \cos(2x) \cdot \sin x$ minimumus intervale $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$.

***189.** Raskite funkcijos $f(x)$ reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus:
a) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$; b) $f(x) = \mathrm{tg}\, x - 2x$.

190. Raskite funkcijos $f(x)$ ekstremumus:
a) $f(x) = x - 2\sin x$; b) $f(x) = x + 2\cos x$;
c) $f(x) = \sin^2 x - \cos x$; d) $f(x) = \cos^2 x + \sin x$;
e) $f(x) = 10\cos x + \sin(2x) - 6x$.

1.5. RODIKLINĖS, LOGARITMINĖS IR LAIPSNINĖS FUNKCIJŲ IŠVESTINĖS

191. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką:

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$; b) $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$;

c) $f(x) = \mathrm{e}^{|x|}$; d) $f(x) = 1 - \mathrm{e}^{x}$;

e) $f(x) = 2^{1-x}$; f) $f(x) = 3^{1-|x|}$.

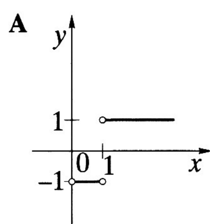
192. Nubraižykite funkcijos $g(x)$ grafiką:

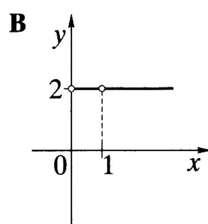
a) $g(x) = \ln x$; b) $g(x) = \ln|x|$.

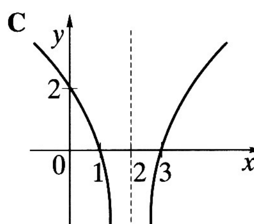
193. Duotos funkcijos ir jų grafikai:

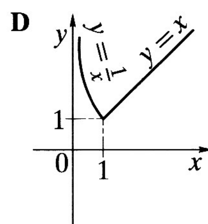
a) $g_1(x) = x^{\log_x 2}$; b) $g_2(x) = \mathrm{e}^{|\ln x|}$;

c) $g_3(x) = \frac{|\ln x|}{\ln x}$; d) $g_4(x) = \log_2(2-x)^2$.

A


B


C


D


Kiekvienai funkcijai nurodykite, kuriame brėžinyje pavaizduotas jos grafikas.

194. Apskaičiuokite funkcijos ribą:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x+1}-\mathrm{e}}{\sin 2x}$;

*c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$; d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$.

Patarimas. c) Pažymėkite $x + 1 = \mathrm{e}^{t}$.

---

195. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę:

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$; b) $f(x) = 3^{1-x}$;

c) $f(x) = x^3\mathrm{e}^{-x}$; d) $f(x) = (2x^2 - 1)\cdot 2^{2x}$;

e) $f(x) = \sin x \cdot \mathrm{e}^{2x}$; f) $f(x) = (2^{-x} + 2^{x})\cdot \cos x$;

g) $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$; h) $f(x) = 3^{\sqrt{x-1}}$.

196. Parinkite teisingą atsakymą:

a) jei $f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$, tai $f'(0) =$
A 0 **B** 2 **C** 1 **D** −2 **E** −1

b) jei $f(x) = 10^{\sin 2x}\cdot \lg \mathrm{e}$, tai $f'(0) =$
A −1 **B** 0 **C** 1 **D** 2 **E** 3

197. Išspręskite nelygybę $f'(x) < g'(x)$, jei:

a) $f(x) = e^{2x} - (3x)$, $g(x) = 5(e^x - x + 3)$;

b) $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + 4$, $g(x) = 4e^x - 6x + e^2$.

198. Ar teisinga lygybė $f'(0) = 0$, kai:

a) $f(x) = e^{x^3 - 5x^2}$; b) $f(x) = 2^{x - x^3}$;

c) $f(x) = e^{\operatorname{tg}^2(3x)}$; d) $f(x) = 2^{\sin(4x^3)}$?

199. Raskite funkcijos $g(x)$ išvestinę:

a) $g(x) = \ln(2x)$; b) $g(x) = \log_3(2x - 1)$;

c) $g(x) = \ln(x^2 + x^3)$; d) $g(x) = \lg \frac{10-x}{x+2}$;

e) $g(x) = \ln\sqrt{x^2 - 1}$; f) $g(x) = x^2 \ln x$;

g) $g(x) = \sin x \cdot \ln^2 x$; h) $g(x) = \ln\big(3\sin(4x) + 4\big)$.

200. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę:

a) $f(x) = xe^{-x}$; b) $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$;

c) $f(x) = 3^x + 4^x$; d) $f(x) = \log_5\sqrt{x}$;

e) $f(x) = x\ln x$; f) $f(x) = \ln^2 x$.

201. Patikrinkite, ar funkcija $f(x) = e^x + e^{-x}$ tenkina lygybes:
$f'(x) + f(x) = 2e^x$, $f'(x) - f(x) = -2e^{-x}$.

202. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinės reikšmę taške x_0:

a) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = \ln 3$; b) $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$, $x_0 = \ln 9$;

c) $f(x) = \ln(x^2 - 4x)$, $x_0 = 5$; d) $f(x) = x\ln^2 x$, $x_0 = e$.

203. Parinkite teisingą atsakymą:

a) jei $g(x) = x^3\ln(x^2 + 1)$, tai $f'(0) =$
A -1 **B** 0 **C** 1 **D** 2 **E** 3

b) jei $g(x) = x\lg(x^3 + x^2 + 1)$, tai $f'(0) =$
A -1 **B** 0 **C** 1 **D** 2 **E** 3

204. a) Įrodykite, kad funkcija $f(x) = (x + 1)e^x$ tenkina lygybę
$f'(x) - f(x) = e^x$.

b) Raskite konstantą a, su kuria funkcija $f(x) = (ax - 1)e^x$ tenkina lygybę
$f'(x) - f(x) = 2e^x$.

205. Išspręskite nelygybę $f'(x) < g'(x)$, jei:

a) $f(x) = x + 3\ln(x - 2)$, $g(x) = x + 5\ln(x - 1)$;

b) $f(x) = 2x + 3\ln(x + 3)$, $g(x) = 2x + 4\ln(x - 1)$.

206. Ar teisinga nelygybė $f'(e) < \frac{1}{6}$, jei:

a) $f(x) = \ln(\ln x^2)$; b) $f(x) = \ln^2(\ln x)$?

207. Raskite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritį, nubraižykite grafiką, raskite išvestinę:
a) $f(x) = \ln(-x)$; b) $f(x) = \log_2\left(\frac{-1}{x}\right)$.

208. Raskite funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritį, nubraižykite grafiką, raskite išvestinę:
a) $f(x) = -\sqrt{-x}$; b) $f(x) = \sqrt[4]{-x}$.

209. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę:
a) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$; b) $f(x) = x^2\sqrt{x}$;
c) $f(x) = \sqrt{x}(x^3 - \sqrt{x} + 1)$; d) $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$;
e) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$; f) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$;
g) $f(x) = \sqrt{1 + e^{2x}}$; h) $f(x) = \ln\sqrt{1 + x^2}$.

210. Raskite $f'(0)$, kai:
a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 1} + \sqrt[4]{x + 1} + \sqrt[5]{6}$;
b) $f(x) = \sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[4]{x^3 + 1} - \sqrt[6]{5}$;
c) $f(x) = \sqrt[4]{x + 1} \cdot \sqrt[3]{x^3 + 1} + \sqrt[4]{3}$;
d) $f(x) = \sqrt[3]{x + 1} \cdot \sqrt[4]{x^3 + 1} + \sqrt[3]{4}$.

211. Duota funkcija $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$, $D_f = \left[\frac{1}{16}; 81\right]$. Raskite šios funkcijos išvestinės reikšmių sritį.

212. Apskaičiuokite funkcijos $g(x)$ išvestinę:
a) $g(x) = \ln\left(x^2 + \sqrt{x^4 + 1}\right)$; b) $g(x) = \ln\left(e^x + \sqrt{1 + e^{2x}}\right)$.

213. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę taške x_0:
a) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$, $x_0 = 2$; b) $f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$, $x_0 = 0$.

214. Parašykite funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės, nubrėžtos per tašką K, lygtį:
a) $f(x) = e^x$, $K(0; 1)$; b) $f(x) = e^{2x}$, $K\left(1; e^2\right)$;
c) $f(x) = \ln x$, $K(1; 0)$; d) $f(x) = \ln(x + 1)^2$, $K(0; 0)$.

215. Parašykite funkcijos $g(x)$ grafiko liestinės, lygiagrečios duotajai tiesei, lygtį:
a) $g(x) = e^{2x}$, $y = 2ex + 4$; b) $g(x) = e^x$, $y = ex + 7$;
c) $g(x) = \ln x^2$, $y = -x + 1$; d) $g(x) = \sqrt[4]{x^3}$, $y = \frac{3}{8}x - 1$.

216. Parašykite funkcijos $h(x)$ grafiko liestinės, statmenos duotajai tiesei, lygtį:
a) $h(x) = e^{-x}$, $y = \frac{1}{2}x + 3$; b) $h(x) = x^{\frac{2}{3}}$, $y = -\frac{3}{2}x$.

217. a) Su kuriomis a reikšmėmis tiesė $y = ax - 2$ liečia funkcijos $f(x) = 1 + \ln x$ grafiką?
b) Su kuriomis a reikšmėmis tiesė $y = ax + 1$ liečia funkcijos $f(x) = 2 - \ln x$ grafiką?

218. Funkcijos $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$ grafiko taške nubrėžtos liestinės krypties koeficientas lygus 2. Be to, ši liestinė neina per koordinačių pradžios tašką. Raskite taškus, kuriuose ši liestinė kerta koordinačių ašis.

219. Funkcijos $f(x) = \sqrt{17(x^2+1)}$ grafiko liestinės tarpusavyje yra statmenos, o jų susikirtimo taškas yra Oy ašyje. Raskite tų liestinių lygtis.

Patarimas. Atkreipkite dėmesį: duotoji funkcija yra lyginė.

***220.** Funkcijos $f(x) = \sqrt{10-4x} - 1$ grafikas abscisių ašį kerta taške A, o jo liestinė — taške B, $OA = AB$, čia O — koordinačių pradžios taškas. Raskite šios liestinės lygtį.

***221.** Funkcijos $f(x) = 2 - \sqrt{2x+2}$ grafikas abscisių ašį kerta taške A, o jo liestinė — taške B. Raskite liestinės lygtį, jei koordinačių pradžios taškas yra atkarpos AB vidurys.

222. Duota funkcija

$$f(x) = \sqrt{(5 - x^{\frac{2}{3}})^3}.$$

1. Parašykite funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės, nubrėžtos per tašką $A(1; 8)$, lygtį.
2. Raskite liestinės atkarpos tarp koordinačių ašių ilgį.

223. Raskite funkcijos $f(x)$ reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus:

a) $f(x) = 3 - x + e^{x+2}$; b) $f(x) = e^{3-x} + x + 2$;

c) $f(x) = xe^{-5x}$; d) $f(x) = (x-1)e^{3x}$;

*e) $f(x) = x^2e^{-x}$; f) $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$.

224. Raskite funkcijos $f(x)$ reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus:

a) $f(x) = (2^x - 1)(2^x - 2)$; b) $f(x) = 3^x(3^x - 18)$;

c) $f(x) = e^{x^2-5x+6}$; d) $f(x) = 3^{(x-3)(x-5)}$;

e) $f(x) = 2^{-x^2+4}$; f) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x(x-2)}$.

Patarimas. Šiuose pratimuose pravartu remtis tuo, kad funkcijų $f(x) = a^x$ reikšmės didėja, kai $a > 1$.

---

225. Įrodykite, kad funkcijos $f(x) = 3x - e^{-x}$ reikšmės didėja visoje jos apibrėžimo srityje.

226. Įrodykite, kad funkcijos $f(x) = e^{-x} - 5x$ reikšmės mažėja visoje jos apibrėžimo srityje.

227. Raskite a reikšmes, su kuriomis funkcija $f(x) = (x^2-3)e^{1-x}$ yra didėjanti intervale $(a; a+2)$.

228. Raskite a reikšmes, su kuriomis funkcija $f(x) = (8-x^2)e^{x+1}$ yra mažėjanti intervale $(a; a+3)$.

229. Raskite funkcijos $g(x)$ reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus, ekstremumus:

a) $g(x) = 2\ln x - x^2$; b) $g(x) = x - \ln(1-x)^2$;

c) $g(x) = x^2 - 18\ln x$; d) $g(x) = x^3 \ln x$;

e) $g(x) = \ln(x^2+2x+2)$; f) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+5)$.

230. Parašykite funkcijos $f(x) = 4^x - 2^{x+1}$ grafiko liestinės lygtį jos minimumo taške.

231. Parašykite funkcijos $f(x) = 3^{x+1} - 27^x$ grafiko liestinės lygtį jos maksimumo taške.

232. Raskite funkcijos $g(x)$ kritinius taškus:

a) $g(x) = xe^{x-x^2}$; b) $g(x) = e^x(-x^2+4x-1)$;

c) $g(x) = e^{-x}(x^2+5x+7)$; d) $g(x) = 2^x + x\ln 2 + 1$;

*e) $g(x) = e^{|x|} - 2x + 1$; *f) $g(x) = e^{-2x} + (6-2a)e^{-x} + 6ax$.

233. Raskite funkcijos $h(x)$ kritinius taškus:

a) $h(x) = \ln(4x - x^2)$; b) $h(x) = \ln^2 x - 6\ln x + 5$;

c) $h(x) = \ln(x^2+4x+6)$; d) $h(x) = \ln(2\cos x)$;

e) $h(x) = \ln(\sin x) + x$; f) $h(x) = \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(\cos x - \sin x)$.

234. Raskite funkcijos $f(x)$ ekstremumų taškus:

a) $f(x) = (x^2-2x)\ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x + 1$;

b) $f(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x - \frac{x^2}{4} + x + 1$.

235. Su kuriomis natūraliosiomis n reikšmėmis funkcija $f(x) = x^n e^{-x}$ turi ekstremumų?

236. Su kuriomis teigiamomis a reikšmėmis $x = 4$ yra funkcijos $f(x) = x + e^{a-x}$ minimumo taškas?

237. Su kuriomis teigiamomis a reikšmėmis $x = -3$ yra funkcijos $f(x) = e^{x-a} - x$ minimumo taškas?

238. Su kuriomis teigiamomis a reikšmėmis $x = 2$ yra funkcijos $f(x) = \ln x - ax$ maksimumo taškas?

239. Raskite a ir b reikšmes, su kuriomis funkcija $f(x) = a\ln x + bx^2 + x + 2$ turi ekstremumus taškuose $x = 1$ ir $x = 2$.

240. Materialusis taškas juda pagal dėsnį

$$s(t) = \sqrt[3]{t^2}, \quad t \geqslant 0.$$

Įrodykite, kad jo pagreitis atvirkščiai proporcingas nueito kelio kvadratui.

1.6. FUNKCIJŲ IŠVESTINIŲ TAIKYMAI

241. Nubraižykite kvadratinio trinario grafiką dviem būdais:
1) išskirdami dvinario kvadratą; 2) tyrimui naudodami išvestinę.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$; b) $f(x) = -x^2 + 5x - 6$;
c) $f(x) = x^2 + x + 1$; d) $f(x) = -x^2 + x - 1$.

242. Įrodykite, kad parabolės $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, viršūnės koordinatės yra $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

243. Ištirkite daugianarį ir nubraižykite jo grafiką:

a) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2$; b) $p(x) = 3x^3 - x + 2$;
c) $p(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2x - 1\frac{1}{3}$; d) $p(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x$;
e) $p(x) = 3x - x^3$; f) $p(x) = x^3 - x^2$;
g) $p(x) = x^3 - 3x + 3$; h) $p(x) = x^3 - 2x^2$.

244. Ištirkite daugianarį ir nubraižykite jo grafiką:

a) $p(x) = (x + 2)^2(x - 1)^2$; b) $p(x) = (x - 2)^2(x + 1)^2$;
c) $p(x) = -x^4 + 2x^2 + 8$; d) $p(x) = x^4 - 4x^2 + 4$;
e) $p(x) = (x - 1)^3(x + 1)^2$; f) $p(x) = (x + 1)^3(x - 1)^2$.

245. Ištirkite racionaliąją funkciją, nubraižykite jos grafiką:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$; b) $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$;
c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$; d) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$;
e) $f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$; f) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$;
g) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$; h) $f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2$.

246. Ištirkite funkciją, nubraižykite jos grafiką:

a) $h(x) = \cos^3 x$; b) $h(x) = \sin x + \cos^2 x$;
c) $h(x) = \cos x - \frac{1}{2}\sin(2x)$; d) $h(x) = \sin x - \frac{1}{2}\cos(2x)$.

247. Ištirkite funkciją, nubraižykite jos grafiką:

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; b) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$;
c) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$; d) $f(x) = \ln\frac{x}{x-1}$.

248. Nubraižykite kvadratinio trinario grafiką. Raskite jo didžiausią ir mažiausią reikšmes intervale I:

a) $f(x) = (x + 4)^2$, $I = [-2; 0]$; b) $f(x) = (x - 3)^2$, $I = [0; 4]$;
c) $f(x) = (2x - 1)^2$, $I = [1; 2]$; d) $f(x) = x^2 - 8x + 6$, $I = [2; 6]$;
e) $f(x) = 7 - 3x - x^2$, $I = [-2; 0]$; f) $f(x) = 6 + 6x - x^2$, $I = [-1; 4]$;
g) $f(x) = x^2 - 2x + 5$, $I = [-1; 2]$; h) $f(x) = -x^2 + 6x - 1$, $I = [0; 4]$.

249. Nubraižykite kvadratinio trinario $f(x) = x^2 - x + 1$ grafiką. Remdamiesi juo raskite šio trinario didžiausią ir mažiausią reikšmes intervale:

a) $I = [0; 1]$; b) $I = \left[\frac{1}{2}; 2\right]$; c) $I = [-1; 3]$.

250. Raskite mažiausią ir didžiausią funkcijos reikšmes intervale I, kai:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$, $I = [2; 5]$;
b) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 8x - 2$, $I = [-1; 1]$;
c) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3$, $I = [-3; -1]$;
d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$, $I = [-1; 2]$;
e) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$, $I = [-1; 1]$;
f) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$, $I = [-2; 2]$;
g) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1$, $I = [-2; 1]$;
h) $f(x) = x^4 - 2x^2$, $I = [0; 2]$;
i) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$, $I = [-2; 2]$;
j) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$, $I = [-1; 3]$.

251. Įrodykite, kad:

a) $x^3 - 6x^2 + 1 \leqslant 1$, kai $x \in [-1; 5]$;
b) $x^3 - 6x^2 + 1 \geqslant -15$, kai $x \in [-1; 2]$;
c) $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5 \leqslant 325$, kai $x \in [-2; 4]$;
d) $7 + 4x^3 - x^4 \leqslant 34$, kai $x \in [-1; 3]$;
e) $7 \leqslant x^4 - x^3 + 2x^2 - 3x \leqslant 38$, kai $x \in [-2; -1]$;
f) $3x^5 - 5x^3 - 30x \leqslant 40$, kai $x \in [-2; 2]$.

252. Nesinaudodami išvestine, raskite funkcijos $f(x)$ didžiausią reikšmę. Su kuriais x ta reikšmė įgyjama, kai:

a) $f(x) = \frac{3}{|2x^2+x-3|+1} + 3$; b) $f(x) = \frac{6}{|3x^2+x-2|+2} + 2$?

253. Remdamiesi funkcijos $f(x) = |x - a|$ grafiku, raskite didžiausią ir mažiausią funkcijos reikšmę intervale $[1; 2]$. Ištirkite $f(x)$ su visomis $a \in \boldsymbol{R}$ reikšmėmis.

254. Raskite didžiausią ir mažiausią funkcijos $f(x)$ reikšmes intervale I:

a) $f(x) = x^2 + |x + 2|$, $I = [-3; -1]$;
b) $f(x) = (x - 3)|2 - x|$, $I = [1; 4]$;
c) $f(x) = \left|x^2 - 4|x|\right|$, $I = [-1; 3]$;
d) $f(x) = |x^3 - 1| - |x^2 - 2x| - x$, $I = [-2; 3]$.

255. Įrodykite, kad:

a) $|x^3 + 2x + 1| \leqslant 2$, kai $x \in [-1; 0]$;
b) $|x^3 - 3x| \leqslant 2$, kai $x \in [-2; 2]$;
c) $|x^2 - 5x + 6| \leqslant 6$, kai $x \in [0; 2{,}4]$.

256. Raskite funkcijos

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x^3, & \text{kai } -1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 8x - x^2, & \text{kai } 3 < x \leqslant 5, \end{cases}$$

didžiausią ir mažiausią reikšmes jos apibrėžimo srityje.

257. Raskite mažiausią sekos $x_n = n^4 - 5n^3 - 3n^2$ narį.

258. Raskite funkcijos $f(x)$ didžiausią ir mažiausią reikšmes intervale I:

a) $f(x) = \frac{x-3}{x+1}$, $I = [0; 2]$; b) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$, $I = [-1; 1]$;

c) $f(x) = \frac{x^2+16}{8x}$, $I = [1; 6]$; d) $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$, $I = [-4; 0]$;

e) $f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $I = [0; 1]$; f) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$, $I = [-1; 1]$.

259. a) Raskite didžiausią funkcijos $f(x) = \frac{2x^2-9x-2}{x^2-5x-6}$ reikšmę intervale $[0; 5]$.

b) Raskite mažiausią funkcijos $f(x) = \frac{7x^2-8}{x^2+x+1}$ reikšmę intervale $[-1; 3]$.

260. Raskite skaičių sekos $x_n = \frac{n-12}{2n^2-n+7}$ didžiausią ir mažiausią narius.

261. Įrodykite, kad $\frac{3x^2-5}{x^3+1} \geqslant -1$, kai $x < -1$.

262. Raskite funkcijos $f(x)$ reikšmių sritį, kai:

a) $f(x) = \frac{x^2-3x+1}{x^2+1}$; b) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+3}$.

263. Raskite funkcijos $f(x)$ didžiausią ir mažiausią reikšmes intervale I, kai:

a) $f(x) = x + 2\sqrt{x}$, $I = [0; 4]$; b) $f(x) = x - 2\sqrt{x}$, $I = [0; 4]$;

c) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, $I = [-4; 3]$; d) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$, $I = [0; 3]$.

264. Raskite funkcijos $f(x)$ didžiausią ir mažiausią reikšmes apibrėžimo srityje:

a) $f(x) = \sqrt{2x - 4} + \sqrt{5 - x}$; b) $f(x) = \sqrt{3 - x} + \sqrt{x - 1}$.

265. Raskite funkcijos $f(x)$ didžiausią ir mažiausią reikšmes intervale I, kai:

a) $f(x) = \cos(2x) - x$, $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; b) $f(x) = \sin(2x) - 2x$, $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

c) $f(x) = \cos(2x) + 2x$, $I = [0; \pi]$; d) $f(x) = \cos^2 x - \sin x$, $I = [0; \pi]$.

266. Raskite funkcijos $f(x)$ didžiausią ir mažiausią reikšmes jos apibrėžimo srityje:

a) $f(x) = \sin^2 x - 20\cos x + 1$; b) $f(x) = \frac{1}{\sin x+4} - \frac{1}{\cos x-4}$.

267. Įrodykite, kad $\sin x > \frac{2x}{\pi}$, kai $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

268. Raskite funkcijos $f(x)$ didžiausią ir mažiausią reikšmes intervale I, kai:

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}(x^2 + x - 5)$, $I = [-4; 4]$;

b) $f(x) = \frac{2^x+2^{-x}}{\ln 2}$, $I = [-1; 2]$;

c) $f(x) = 3^{3x} - 2 \cdot 3^{2x} + 3^x$, $I = [-1; 1]$;

d) $f(x) = 2 \cdot 3^{3x} - 4 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^x$, $I = [-1; 1]$;

e) $f(x) = x - \ln x$, $I = \left[\frac{1}{2}; \mathrm{e}\right]$;

f) $f(x) = |x^2 + 2x - 3| + \frac{3}{2}\ln x$, $I = \left[\frac{1}{2}; 4\right]$.

269. Su kuria x reikšme funkcijos $g(x) = 2^{x^2} - 1 + \frac{2}{2^{x^2}+2}$ reikšmė yra mažiausia?

270. Raskite didžiausią funkcijos $f(x) = \log_{4x}\left(32x^3\right)$ reikšmę intervale $[2; 8]$.

271. Su kuria a reikšme funkcijos $f(x) = x + \mathrm{e}^{a-x}$ mažiausia reikšmė lygi 4?

272. Su kuria a reikšme funkcijos $f(x) = \mathrm{e}^{x-a} - x$ mažiausia reikšmė lygi -3?

273. Raskite funkcijos $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ grafiko tašką, kad atstumų nuo šio taško iki koordinačių ašių suma būtų mažiausia.

274. Raskite du teigiamus skaičius, kurių suma būtų lygi 3, o trigubo pirmojo skaičiaus ir antrojo skaičiaus kubo suma būtų mažiausia.

275. Raskite du teigiamus skaičius, kurių suma būtų lygi 5, o pirmojo kubo sandauga su antruoju būtų didžiausia.

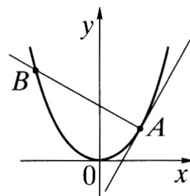
276. Per tašką $A(-1; 2)$ nubrėžta tiesė su teigiamu krypties koeficientu. Koordinačių ašis ši tiesė kerta taškuose $B(x; 0)$ ir $C(0; y)$. Kokią mažiausią reikšmę gali įgyti atstumų suma $OB + OC$ (O — koordinačių pradžios taškas)?

277. Per tašką $A(2; 1)$ nubrėžta tiesė su neigiamu krypties koeficientu. Koordinačių ašis ji kerta taškuose $B(x; 0)$ ir $C(0; y)$. Kokią mažiausią reikšmę gali įgyti atstumų sandauga $OB \cdot OC$ (O — koordinačių pradžios taškas)?

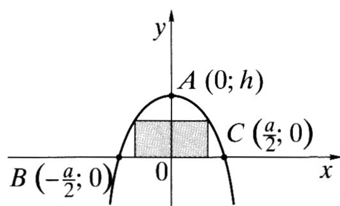
278. Raskite parabolės $y = x^2$ tašką, artimiausią taškui $A(-1; 2)$.

279. Parabolės $y = x^2$ taškai A ir B yra simetriški ordinačių ašies atžvilgiu. Kokią mažiausią reikšmę gali įgyti atstumų nuo taško $C(2; 2)$ kvadratų suma $AC^2 + BC^2$?

280. Taškas A yra parabolėje $y = x^2$. Per jį nubrėžta tiesė, statmena parabolės liestinei taške A. Ši tiesė kerta parabolę taške B. Koks gali būti trumpiausias atstumas tarp taškų A ir B?



281. Parabolės viršūnė yra taške $A(0; h)$. Abscisių ašį ji kerta taškuose $B\left(-\frac{a}{2}; 0\right)$ ir $C\left(\frac{a}{2}; 0\right)$. Sakykime, kad stačiakampio viena kraštinė yra abscisių ašyje, o dvi viršūnės — parabolės taškuose, esančiuose viršutinėje pusplokštumėje. Raskite didžiausią galimą tokio stačiakampio plotą.



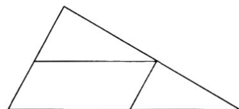
282. Kokį didžiausią plotą gali turėti trapecija, kurios trys kraštinės lygios a?

283. Iškilojo keturkampio įstrižainės yra tarpusavyje statmenos. Jų ilgių suma lygi 6 cm. Koks gali būti didžiausias tokio keturkampio plotas?

Patarimas. Iškilojo keturkampio, kurio įstrižainės yra l_1 ir l_2, o kampas tarp jų lygus φ, plotą galima apskaičiuoti pagal formulę $S = \frac{1}{2}l_1l_2 \sin\varphi$.

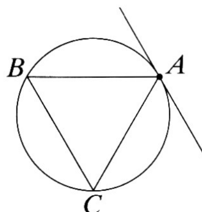
---

284. Dvi į trikampį įbrėžto lygiagretainio kraštinės yra trikampio kraštinėse, o viena viršūnė — trečioje kraštinėje. Kur turi būti ši viršūnė, kad lygiagretainio plotas bus didžiausias?



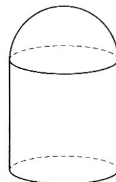
285. Stačiosios trapecijos smailusis kampas lygus 45°, o perimetras yra 4 cm. Raskite trapecijos aukštinės ilgį, su kuriuo trapecijos plotas didžiausias.

286. Apskritimo spindulys $r = 10$ cm. Per apskritimo tašką A nubrėžta liestinė. Kokiu atstumu nuo taško A reikia brėžti liestinei lygiagrečią stygą BC, kad trikampio ABC plotas būtų didžiausias?



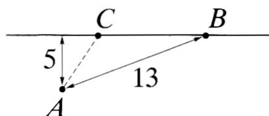
287. Kokį mažiausią viso paviršiaus plotą gali turėti ritinys, jei jo tūris lygus V?

288. Projektuojama ritinio formos pašarų saugykla su pusės sferos formos stogu. Saugyklos talpa $1000\,\text{m}^3$. Kokį mažiausią viso paviršiaus plotą gali turėti tokia saugykla?

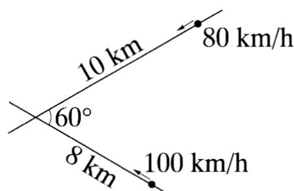


289. Į kūgį, kurio pagrindo spindulys R, aukštinė taip pat lygi R, įbrėžta taisyklingoji keturkampė prizmė. Koks turi būti prizmės pagrindo kraštinės ilgis, kad jos tūris būtų didžiausias?

290. Turistas keliauja iš vietovės A į vietovę B. Vietovė A yra nutolusi 5 km atstumu nuo tiesaus kelio ir 13 km — nuo vietovės B, kuri yra prie pat kelio. Turistas pasirenka kelio tašką C ir iš pradžių lauku eina iki taško C, po to keliu iki taško B. Laukais turistas eina 3 km/h greičiu, o keliu — 5 km/h. Kiek mažiausia laiko prireiks turistui?



291. Dvi autostrados kertasi 60° kampu. Jomis sankryžos link pastoviais greičiais važiuoja dvi automašinos — viena 80 km/h, kita — 150 km/h greičiu. Pradžioje jos buvo atitinkamai 10 km ir 8 km nuo sankryžos. Kada atstumas tarp mašinų bus mažiausias?



292. Reikia aptverti stačiakampio formos sklypą išorine tvora, be to, tą sklypą vidinėmis tvoromis reikia padalyti į devynis vienodus stačiakampius sklypus. Vienas išorinės tvoros metras kainuoja 5 litus, o vidinės — 2 litus.

1) Kokio didžiausio ploto sklypą galėtume aptverti išleidę tvorai pirkti 700 litų?
2) Kiek procentų didesnio ploto sklypą galėtume aptverti, jeigu jį reikėtų padalyti ne į devynis, bet į šešis vienodus stačiakampius sklypus?
3) Jeigu reikėtų aptverti lygiakraščio trikampio formos sklypą, be to, jį padalyti į keturis vienodus lygiakraščio trikampio formos sklypus, kokį didžiausią sklypą galėtume šitaip aptverti, išleidę tvorai 700 litų?

293. Stačiakampio formos stiklo lakšto matmenys $100\,\text{cm} \times 60$ cm. Nuo lakšto atskilo vienas kampas — statusis trikampis, kurio statinių ilgiai buvo 40 cm ir 20 cm. Kokio didžiausio ploto stačiakampį galima išrėžti iš likusio stiklo, pjaunant lygiagrečiai lakšto kraštinėms, jei ilgesnis atskilusio trikampio statinis buvo:
a) ilgesnėje stiklo lakšto kraštinėje; b) trumpesnėje stiklo lakšto kraštinėje?

294. Duoti du taškai $A(-1; 0)$ ir $B(-1; 1)$. Pasirinkę trečiąjį tašką C, esantį atkarpoje, jungiančioje taškus $P(0; 2)$ ir $Q(3; 0)$, ir nuleidę statmenį į tiesę Ox, gauname trapeciją $ABCD$ (čia D — statmens, nuleisto į Ox ašį, pagrindas). Kaip pasirinkti tašką C, kad trapecijos $ABCD$ plotas būtų didžiausias?

295. Atkarpoje, jungiančioje taškus $P(-2; 0)$ ir $Q(0; 2)$, pasirinkime tašką A, o atkarpoje, jungiančioje taškus $Q(0; 2)$ ir $R(4; 0)$ — tašką B. Pažymėję statmenų, nuleistų iš šių taškų į tiesę Ox, pagrindus D ir C, gauname trapeciją $ABCD$ (arba atskiru atveju — trikampį). Tarkime, kad pasirinkto taško A abscisė lygi a $(-2 \leqslant a \leqslant 0)$.
a) Kaip pasirinkti tašką B, kad trapecijos $ABCD$ plotas būtų didžiausias?
b) Koks gali būti didžiausias šiuo būdu sudarytos trapecijos (arba trikampio) plotas?

***296.** 1. Įrodykite teoremą, išsiaiškinkite jos geometrinę prasmę:
Jei funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra diferencijuojamos intervale $[a; +\infty)$ ir šiame intervale $f'(x) > g'(x)$, o taške a teisinga nelygybė $f(a) \geqslant g(a)$, tai intervale $(a; +\infty)$ yra teisinga nelygybė $f(x) > g(x)$.

2. Remdamiesi šia teorema, įrodykite nelygybę:

a) $\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 2x > -\frac{2}{3}$, kai $x > -1$;

b) $\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 2x < \frac{2}{3}$, kai $x < 1$;

c) $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x}$, kai $x > 0$;

d) $\sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$, kai $x > 0$;

e) $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$, kai $x > 1$;

f) $\sqrt[n]{1+x} < 1 + \frac{x}{n}$, kai $x > 0$;

g) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$, kai $x > 0$;

h) $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$, kai $x > 0$;

i) $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{6}$, kai $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

j) $e^x > 1 - x$, kai $x > 0$;

k) $x > \ln(1+x)$, kai $x > 0$.

2. INTEGRALAI

2.1. PIRMYKŠĖS FUNKCIJOS IR NEAPIBRĖŽTINIAI INTEGRALAI

1. Raskite funkciją $f(x)$, kai žinoma jos pirmykštė funkcija $F(x)$:

a) $F(x) = 4x^3 - 3x^2 + 3$;
b) $F(x) = 5x^4 + 2x - 3$;
c) $F(x) = 6x^5 + 5x^3 + 2$;
d) $F(x) = x^{\frac{3}{5}} - 6x^{\frac{2}{3}} - 2$;
e) $F(x) = \sqrt[3]{x} - 4\sqrt{x+2}$;
f) $F(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt[3]{x^2-1}$;
g) $F(x) = xe^{2x} + e^{-3x}$;
h) $F(x) = \log_2(x^2+1)$.

2. Patikrinkite, ar funkcija $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė:

a) $F(x) = x\ln x + 4,\ f(x) = \ln(ex)$;
b) $F(x) = xe^{2x} + x^3 - \ln 2,\ f(x) = e^{2x}(2x+1) + 3x^2$;
c) $F(x) = e \cdot \sin x + \cos x,\ f(x) = e \cdot \cos x - \sin x$;
d) $F(x) = \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{3},\ f(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$;
e) $F(x) = \frac{x+1}{x+2} + \frac{1}{x^2},\ f(x) = \frac{1}{(x+2)^2} - \frac{2}{x^3}$;
f) $F(x) = \operatorname{tg}(2x) + \operatorname{ctg}\frac{1}{x},\ f(x) = \frac{2}{\cos^2(2x)} + \frac{1}{x^2 \cdot \sin^2\frac{1}{x}}$.

3. Raskite funkcijos $f(x)$ pirmykštės funkcijos reikšmę taške $x = -4$, jei $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}} + 2,\ F(0) = 12$.

4. Raskite visas funkcijos $f(x)$ pirmykštes funkcijas, kai:

a) $f(x) = x^2 - 5x - 1$;
b) $f(x) = x^3 - 4x + 2$;
c) $f(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{3}{x^4} + 2$;
d) $f(x) = 2x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{3}{4}} + 4$;
e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$;
f) $f(x) = \sqrt{3x-1} - \cos\frac{x}{3}$;
g) $f(x) = \sin(2x-3) + x^2$;
h) $f(x) = e^{2x-3} + \cos(3x+1)$.

5. Raskite funkcijos $f(x)$ pirmykštę funkciją, tenkinančią nurodytą sąlygą:

a) $f(x) = 4x - 3,\ F(0) = 4$;
b) $f(x) = -2x + 1,\ F(1) = 2$;
c) $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4},\ F(1) = 3$;
d) $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2},\ F(0) = -1$.

6. Raskite funkcijos $f(x)$ pirmykštę funkciją, kurios grafikas eina per tašką K:

a) $f(x) = x^2 + 2x,\ K\left(1; \frac{4}{3}\right)$;
b) $f(x) = x^3 - 3x,\ K\left(-1; \frac{3}{4}\right)$;
c) $f(x) = x^3 + 3x^2,\ K\left(-1; \frac{1}{4}\right)$;
d) $f(x) = x - 3x^2,\ K\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

7. Funkcijos $f(x)$ grafikas eina per tašką $K(1; 2)$. Žinoma, kad grafiko liestinės bet kuriame taške $x = x_0$ krypties koeficientas yra $k(x_0)$. Raskite funkciją $f(x)$, jei:

a) $k(x_0) = \frac{1}{x_0}$; b) $k(x_0) = -\frac{1}{\sqrt{x_0}}$;

c) $k(x_0) = x_0^{\frac{2}{3}}$; d) $k(x_0) = x_0^{-\frac{3}{2}}$.

8. Funkcijos $f(x)$ pirmykštės funkcijos $F(x)$ grafikas eina per tašką $M(0; 3)$. Raskite $F(x)$ ir išsiaiškinkite, ar taškas N yra funkcijos $F(x)$ grafiko taškas, kai:

a) $f(x) = \cos(2\pi x) + 2x + 2$, $N(1; 6)$;

b) $f(x) = \cos(\pi x) + 3x^2 - 3$, $N(1; 1)$;

c) $f(x) = \mathrm{e}^{3x} - x + 4$, $N(1; 3)$;

d) $f(x) = \mathrm{e}^{-4x} + 2x - 5$, $N(1; 5)$.

9. Raskite funkcijos $f(x)$ nelyginę pirmykštę funkciją $F(x)$, jei:
a) $f(x) = x^2$; b) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$; c) $f(x) = \cos(2x)$.

10. Įrodykite, kad tarp lyginės funkcijos $f(x)$ pirmykščių yra vienintelė nelyginė.

11. Įrodykite, kad nelyginės funkcijos pirmykštės yra lyginės funkcijos.

12. Įrodykite, kad teisingos lygybės:

a) $\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$;

b) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+1} + C$;

c) $\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$;

d) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \ln(\ln x) + C$, $x > 1$;

e) $\int \sqrt{\sin x}\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\sin x\cdot\sqrt{\sin x} + C$;

f) $\int \mathrm{e}^{\sin x}\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\sin x} + C$;

g) $\int x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x(x^2 - 2x + 2) + C$;

h) $\int \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}} + C$.

13. Apskaičiuokite neapibrėžtinį integralą:

a) $\int(2x+3x^3)\,\mathrm{d}x$; b) $\int(4x^3+6x^5)\,\mathrm{d}x$;

c) $\int(3x^2-x^6)\,\mathrm{d}x$; d) $\int(x+3x^2)^2\,\mathrm{d}x$;

e) $\int\left(\frac{4}{x^3}-\frac{3}{x^4}\right)\mathrm{d}x$; f) $\int\left(\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$;

g) $\int\left(x^{-\frac{1}{4}}+2x^{\frac{2}{3}}\right)\mathrm{d}x$; h) $\int\left(\frac{4}{x}+x^{-\frac{1}{4}}\right)\mathrm{d}x$.

14. Apskaičiuokite integralą:

a) $\int(3x-4)^8\,\mathrm{d}x$; b) $\int(2x+7)^7\,\mathrm{d}x$;

c) $\int\sqrt{5x-3}\,\mathrm{d}x$; d) $\int\sqrt[3]{4-3x}\,\mathrm{d}x$;

e) $\int\mathrm{e}^{2x-3}\,\mathrm{d}x$; f) $\int 2^{3x-1}\,\mathrm{d}x$;

g) $\int\sin(\pi x+4)\,\mathrm{d}x$; h) $\int\cos\left(\frac{x}{3}-2\right)\mathrm{d}x$.

15. Apskaičiuokite integralą:

a) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$; b) $\int \frac{1-\cos(2x)}{2\sin x}\,\mathrm{d}x$;

c) $\int \mathrm{tg}^2 x\,\mathrm{d}x$; d) $\int \mathrm{ctg}^2 x\,\mathrm{d}x$;

e) $\int \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{\cos(4x)}\,\mathrm{d}x$; f) $\int \frac{\cos(2x)+\cos(4x)}{\cos(3x)}\,\mathrm{d}x$.

16. Apskaičiuokite integralą:

a) $\int \frac{(2x+1)^2}{x}\,\mathrm{d}x$; b) $\int \frac{(x-2)^3}{x^2}\,\mathrm{d}x$;

c) $\int \frac{x+2}{x+1}\,\mathrm{d}x$; d) $\int \frac{2x-1}{x-1}\,\mathrm{d}x$;

e) $\int \frac{(2\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; f) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt[3]{x}}\,\mathrm{d}x$.

17. Apskaičiuokite neapibrėžtinį integralą:

a) $\int \frac{(\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}^{-3x})^2}{\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$; b) $\int \frac{(3^x+3^{-x})^2}{3^{3x}}\,\mathrm{d}x$.

18. Suprastinę pointegralinę funkciją, suintegruokite:

a) $\int \frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{1+\sin x\cdot\cos x}\,\mathrm{d}x$; b) $\int \frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{1-\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x$;

c) $\int \frac{2\,\mathrm{ctg}\,x}{1+\mathrm{ctg}^2 x}\,\mathrm{d}x$; d) $\int \frac{2\sin x-\sin(2x)}{2\sin x+\sin(2x)}\,\mathrm{d}x$.

19. Kūnas juda tiese kintančiu greičiu

$v(t) = 3t^2 + 4t + 1$ (m/s).

Raskite kelią, kurį kūnas nueina per 3 pirmąsias judėjimo sekundes.

20. Kūnas juda tiese greičiu

$v(t) = 4t(4 - t)$ (m/s).

Raskite kelią, kurį kūnas nueina nuo judėjimo pradžios ($t = 0$) iki sustojimo.

21. Reaktyvinis lėktuvas per 20 s padidino savo greitį nuo 240 km/h iki 720 km/h.

1. Laikydami, kad pagreitis buvo pastovus, apskaičiuokite jį, išreikšdami metrais per sekundę kvadratu.
2. Parodykite, kad lėktuvo kintantis greitis išreiškiamas

   $v(t) = \frac{20}{3}(10 + t)$ (m/s).
3. Raskite per 20 s nuskristą kelią (kilometrais).

22. Impulsinio variklio varomo lėktuvo modelio, judančio tiese, pagreitis laiko momentu t lygus

$a(t) = 1 - \cos(2\pi t)$ (m/s^2).

1. Laikydami, kad starto momentu $t = 0$ modelio greitis buvo 1 m/s, raskite kintančio greičio išraišką.
2. Raskite atstumą, kurį nuskrido modelis nuo starto taško per laiką t.

2.2. APIBRĖŽTINIAI INTEGRALAI

23. Koordinačių plokštumoje pavaizduokite kreivinę trapeciją, apribotą funkcijų grafikais ir tiesėmis:

a) $y = \frac{1}{3}x$, $y = 4 - x$, $y = 0$; b) $y = 1$, $y = -x^2 + 4x + 1$;
c) $y = 7 - x$, $y = 16 - (x-3)^2$; d) $y = \cos x + 1$, $y = 0$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$;
e) $y = \arccos x$, $x = -1$, $y = 0$; f) $y = \mathrm{e}^{-|x|+1}$, $y = 1$;
g) $y = 2^{|x|}$, $y = 4$; h) $y = \ln x$, $y = 0$, $x = \mathrm{e}$.

24. Pagal apibrėžimą, t. y. radę sumų $S_n = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \dots + f(x_n)\Delta x$ ribą, apskaičiuokite integralą:

a) $\int\limits_1^2 \left(\frac{1}{2}x + 3\right) \mathrm{d}x$; b) $\int\limits_{-1}^2 (4 - 2x)\, \mathrm{d}x$; c) $\int\limits_0^1 (2x + 1)\, \mathrm{d}x$;
d) $\int\limits_{-1}^5 (x - 3)\, \mathrm{d}x$; *e) $\int\limits_0^1 (x^2 + 1)\, \mathrm{d}x$; *f) $\int\limits_0^2 (2x^2 - x)\, \mathrm{d}x$.

Nurodymas. Pratimuose e) ir f) reikia pasinaudoti formule

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \ n \in \boldsymbol{N}.$$

---

25. Figūra apribota funkcijų grafikais ir tiesėmis:

a) $y = 0$, $y = 2 - |x - 1|$, $x = 0$;
b) $y = 0$, $y = 1 + \left|\frac{1}{2}x - 2\right|$, $x = 0$, $x = 8$.

1. Pavaizduokite šią figūrą koordinačių plokštumoje.
2. Apskaičiuokite figūros plotą, remdamiesi geometrijos žiniomis.
3. Raskite figūros plotą, ieškodami laiptinių figūrų plotų ribos, — pagal apibrėžtinio integralo apibrėžimą.
4. Gautus rezultatus palyginkite.

26. Pavaizduokite figūrą, kurios plotas užrašomas integralu:

a) $\int\limits_0^2 (x^2 + 1)\, \mathrm{d}x$; b) $\int\limits_2^4 (6x - x^2 - 8)\, \mathrm{d}x$; c) $\int\limits_0^2 (8 - x^3)\, \mathrm{d}x$;
d) $\int\limits_{-1}^3 \sqrt{3 - x}\, \mathrm{d}x$; e) $\int\limits_0^7 \sqrt[3]{x + 1}\, \mathrm{d}x$; f) $\int\limits_1^4 \frac{x+1}{x}\, \mathrm{d}x$;
g) $\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}$; h) $\int\limits_{-2}^2 \mathrm{e}^{-|x|}\, \mathrm{d}x$; i) $\int\limits_1^{\mathrm{e}} \ln x\, \mathrm{d}x$;
j) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 x\, \mathrm{d}x$; k) $\int\limits_0^{1,5} \operatorname{tg} x\, \mathrm{d}x$; l) $\int\limits_{-3}^3 \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} x\right) \mathrm{d}x$.

27. Remdamiesi Niutono ir Leibnico formule, apskaičiuokite integralą. Pavaizduokite figūrą, kurios plotą tas integralas išreiškia:

a) $\int\limits_0^1 x^4\,\mathrm{d}\,x$; b) $\int\limits_1^8 \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}\,x$; c) $\int\limits_1^{10} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$;

d) $\int\limits_0^1 3^x\,\mathrm{d}\,x$; e) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x\,\mathrm{d}\,x$; f) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x\,\mathrm{d}\,x$.

28. Apskaičiuokite integralą:

a) $\int\limits_0^1 (2x^2+1)\,\mathrm{d}\,x$; b) $\int\limits_0^2 (2x^3-x-1)\,\mathrm{d}\,x$; c) $\int\limits_1^{\frac{3}{2}} \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}\,x$;

d) $\int\limits_1^2 \frac{10}{x^6}\,\mathrm{d}\,x$; e) $\int\limits_2^8 \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt{x}}$; f) $\int\limits_1^8 \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt[3]{x}}$;

g) $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x^5}\,\mathrm{d}\,x$; h) $\int\limits_0^1 \sqrt[4]{x^3}\,\mathrm{d}\,x$; i) $\int\limits_1^2 \frac{x^2-1}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$;

j) $\int\limits_1^3 \frac{x^3-2}{x^2}\,\mathrm{d}\,x$; k) $\int\limits_1^2 \frac{2x^3+3x-2}{x^5}\,\mathrm{d}\,x$; l) $\int\limits_1^3 \frac{x^4-2x+1}{x^3}\,\mathrm{d}\,x$.

29. Apskaičiuokite integralą:

a) $\int\limits_{-1}^1 (3x^2-2x+2)\,\mathrm{d}\,x$; b) $\int\limits_0^1 (x^3-4x^2+3)\,\mathrm{d}\,x$;

c) $\int\limits_{-1}^2 (x^3-2x^2-2)\,\mathrm{d}\,x$; d) $\int\limits_{-3}^2 (6-2x^2+x)\,\mathrm{d}\,x$.

30. Patikrinkite, ar teisinga lygybė:

a) $\int\limits_1^4 \frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt{x}} = 1$; b) $\int\limits_1^8 \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt[3]{x}} = \frac{9}{2}$;

c) $\int\limits_1^{2\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}\,x}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\sqrt{2}-3$; d) $\int\limits_1^8 \frac{\mathrm{d}\,x}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}$.

31. Apskaičiuokite integralą:

a) $\int\limits_1^4 \left(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}\right)\mathrm{d}\,x$; b) $\int\limits_1^4 \left(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x}\right)\mathrm{d}\,x$; c) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}\,x$;

d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}\,x$; e) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2\,x\,\mathrm{d}\,x$; f) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{ctg}^2\,x\,\mathrm{d}\,x$;

g) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\,x}{\cos^2 x}$; h) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\,x}{\sin^2 x}$; i) $\int\limits_0^1 \left(x-\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}\,x$;

j) $\int\limits_0^1 \left(2x+\mathrm{e}^{-2x}\right)\mathrm{d}\,x$.

32. Apskaičiuokite integralą:

a) $\int\limits_0^2 (2-x)^6 \,\mathrm{d}x$; b) $\int\limits_0^1 (1-x)^5 \,\mathrm{d}x$; c) $\int\limits_0^8 \sqrt{2x+9}\,\mathrm{d}x$;

d) $\int\limits_0^1 \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x$; e) $\int\limits_0^5 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+4}}$; f) $\int\limits_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x+1}}$;

g) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}x$; h) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\mathrm{d}x$.

33. Raskite plotą figūros, apribotos funkcijų grafikais ir tiesėmis:

a) $y = 1 - x^2$, $y = 0$; b) $y = 4 - x^2$, $y = 0$;

c) $y = x^2$, $y = 4x - 4$, $y = -4x - 4$; d) $y = x^2 + 4$, $y = 4x$, $y = -4x$;

e) $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{2}x$; f) $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{3}x$;

g) $y = 2x^2$, $y = 3 - x^2$; h) $y = x^2$, $y = 3 - 2x^2$.

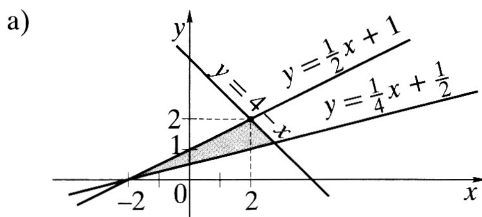
34. Nubraižykite figūrą, kurios plotą išreiškia integralas. Apskaičiuokite tos figūros plotą, t. y. integralą:

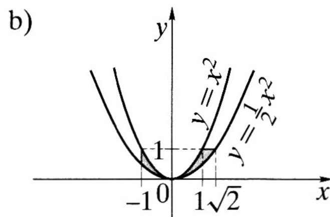
a) $\int\limits_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$; b) $\int\limits_0^2 \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$;

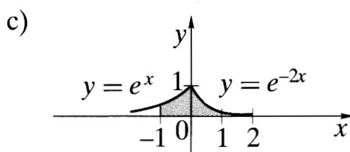
c) $\int\limits_0^2 \sqrt{x^2-2x}\,\mathrm{d}x$; d) $\int\limits_{-2}^0 \sqrt{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$;

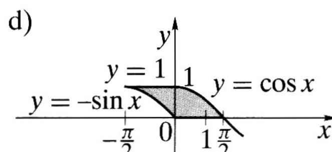
e) $\int\limits_{-a}^a \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$; f) $\int\limits_0^{2a} \sqrt{x^2-2ax}\,\mathrm{d}x$.

35. Išreikškite integralais brėžinyje pavaizduotos figūros plotą:

a) 

b) 

c) 

d) 

36. Raskite plotą, apribotą kreivėmis ir tiesėmis:

a) $y = \sqrt{x}$, $y = x - 6$, $y = 0$; b) $y = \sqrt{x}$, $y = 6 - x$, $y = 0$;

c) $y = -4(x + 3)^3$, $y = -x$, $y = 2x$; d) $y = 3(x - 2)^3$, $y = -3x$, $y = x$;

e) $y = \frac{1}{9}x^3$, $y = \sqrt{3x}$; f) $y = \frac{1}{4}x^3$, $y = \sqrt{2x}$.

37. Raskite plotą figūros, apribotos funkcijos $f(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, grafiku, tiese $x = -\frac{\pi}{2}$ bei tiese, nubrėžta per taškus $A_1\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ ir $A_2(\pi; 0)$.

38. Raskite plotą figūros, apribotos funkcijos $f(x) = \cos x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, grafiku, tiese $x = \frac{\pi}{2}$ bei tiese, nubrėžta per taškus $A_1\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ ir $A_2(0; -1)$.

39. Duota geometrinė progresija b_n, kurios nariai yra teigiami. Įrodykite, kad visų kreivinių trapecijų, apribotų tiesėmis $x = b_{n-1}$, $x = b_n$, $y = 0$ ir funkcijos $f(x) = \frac{1}{x}$ grafiku, plotai yra lygūs.

40. Raskite plotą figūros, apribotos funkcijos $f(x) = \cos x$ grafiku ir jo liestinėmis taškuose $x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

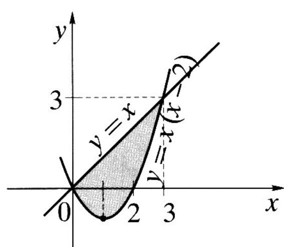
41. Raskite plotą figūros, apribotos funkcijos $f(x) = \sin x$ grafiku, to grafiko liestine taške $x = \pi$ ir tiese $x = 0$.

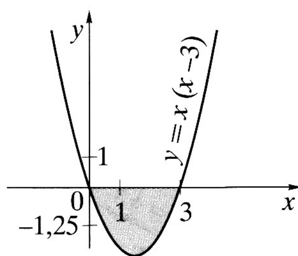
42. Raskite plotą figūros, apribotos funkcijos $f(x) = \sin x$ grafiku, tiese, statmena grafiko liestinei taške $x = \pi$ ir nubrėžtai per lietimosi tašką, bei tiese $x = 0$.

43. Raskite plotą figūros, apribotos kreivėmis:
a) $y = 2 + \cos x$, $y = \sin \frac{x}{2}$, $-3\pi \leqslant x \leqslant \pi$;
b) $y = \cos x$, $y = \sin(2x) - 2$, $\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

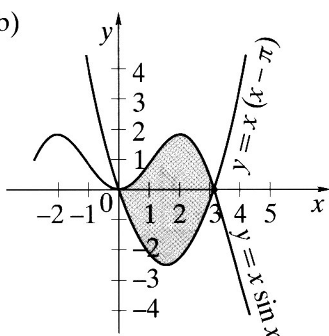
44. Brėžinyje pavaizduotos dvi figūros. Įrodykite, kad jų plotai lygūs:

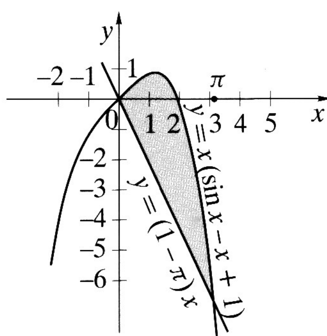
a)





b)





45. Raskite plotą figūros, apribotos parabole ir tiesėmis:

a) $y = (3 - x)(x + 1)$, $y = 4$, $x = 3$;

b) $y = (5 - x)(x + 1)$, $y = 9$, $x = 5$.

46. Raskite plotą figūros, apribotos parabolėmis:

a) $y = 2x^2 + 5x - 5$, $y = x^2 + 4x + 1$;

b) $y = 2x^2 + 7x - 10$, $y = x^2 + 3x + 2$;

c) $y = 2x^2 - 13x + 13$, $y = x^2 - 8x + 13$;

d) $y = x^2 - 3x - 4$, $y = -x^2 + x + 2$;

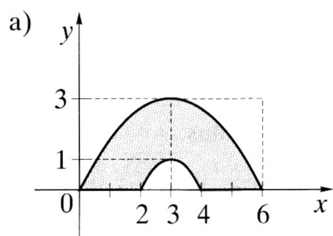
e) $y = x^2 - x - 8$, $y = -x^2 + 3x + 8$;

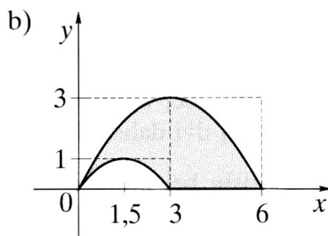
f) $y = x^2 - 5x - 10$, $y = -x^2 + 3x + 14$;

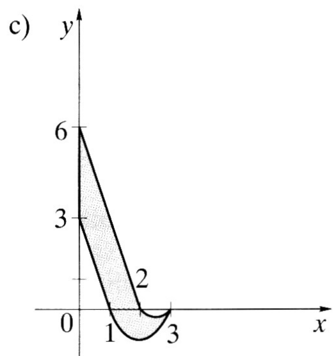
g) $y = x^2 - 2x - 15$, $y = 2x^2 - 4x - 30$;

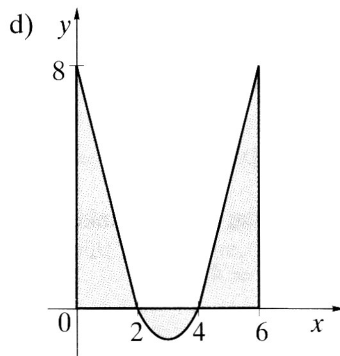
h) $y = x^2 - 4x - 12$, $y = 2x^2 - 8x - 24$.

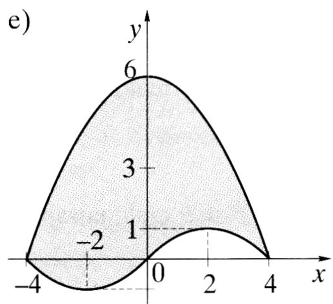
47. Brėžinyje pavaizduota figūra, ribojama parabolių lankais ir tiesių atkarpomis:

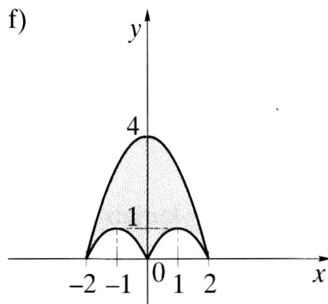
a) 

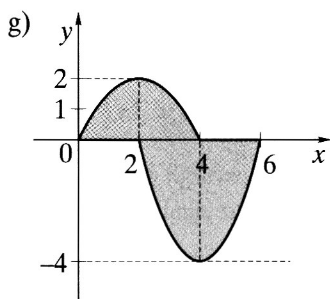
b) 

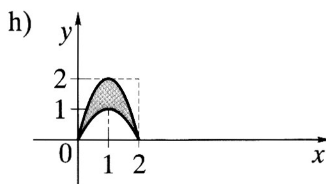
c) 

d) 

e) 

f) 

g) 

h) 

1. Parašykite parabolių lygtis.
2. Išreikškite figūros plotą integralais.
3. Apskaičiuokite figūros plotą.

48. Figūra apribota parabole $y = -x^2 + 2x + 3$ ir tiese $y = 0$. Parabolė $y = (x+1)^2$ ją dalija į dvi dalis. Raskite tų dalių plotų santykį.

49. Figūra apribota parabole $y = -x^2 + 6x - 5$ ir tiese $y = 0$. Parabolė $y = (x-5)^2$ ją dalija į dvi dalis. Raskite tų dalių plotų santykį.

50. Trikampį, apribotą abscisių bei ordinačių ašimis ir tiese $y = -x + 3$, funkcijos $f(x) = 2^x$ grafikas dalija į dvi dalis. Raskite tų dalių plotus.

51. Trikampį, apribotą abscisių bei ordinačių ašimis ir tiese $y = -x + 4$, funkcijos $f(x) = 3^x$ grafikas dalija į dvi dalis. Raskite tų dalių plotus.

52. Raskite plotą figūros, apribotos Ox ašimi ir funkcijos $f(x)$ grafiku:

a) $f(x) = 6 + |x| - x^2$;
b) $f(x) = x^2 - 6|x| - 7$;
c) $f(x) = 5 - x|x-4|,\ x \geqslant 0$;
d) $f(x) = x|x-6| - 16,\ x \geqslant 0$;
e) $f(x) = |x|(x-1)$;
f) $f(x) = (x+2)|x|$;
g) $f(x) = x^2 - 2(x + |x-1|) - 2$;
h) $f(x) = 1 - 4(x - |x+2|) - x^2$.

53. Raskite skaičius a ir b, su kuriais funkcija $f(x) = a\sin(\pi x) + b$ tenkina sąlygas:

$$f'(1) = 2, \quad \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4.$$

54. Raskite skaičius a ir b, su kuriais funkcija $f(x) = a\sin(2x) + b$ tenkina sąlygas:

$$f'(0) = 4, \quad \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 3.$$

55. Raskite skaičius a ir b, su kuriais funkcija $f(x) = a \cdot 3^x + b$ tenkina sąlygas:

$$f'(0) = 2, \quad \int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 12.$$

56. Raskite skaičius a ir b, su kuriais funkcija $f(x) = a \cdot 2^x + b$ tenkina sąlygas:

$$f'(1) = 2, \quad \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 7.$$

57. Su kuria a ($a > 0$) reikšme figūros, apribotos parabole $y = x^2$ ir tiesėmis $y = 0$, $x = a$, plotas lygus 9 kvadratiniams vienetams?

58. Išspręskite nelygybę:
$\int_0^x (t + 2)\,\mathrm{d}t \leqslant 2x + 2.$

59. Kūnas juda tiese greičiu $v(t) = 4t + a$ (m/s). Raskite a, jei žinoma, kad per pirmąsias 2 sekundes nueitas kelias lygus 48 m.

60. Kūnas juda tiese greičiu $v(t) = 2t + 3$ (m/s). Per kiek sekundžių nuo judėjimo pradžios jis nueis 88 m?

61. Vairuotojas nuspaudė stabdžių pedalą tuo momentu, kai automobilio greitis buvo 36 km/h. Raskite kelią, kurį nuvažiavo automobilis per laiką nuo $t = 2$ s iki $t = 6$ s, jei stabdomas automobilis judėjo su pagreičiu $-0{,}5$ m/s^2.

62. Raskite tūrį kūno, gauto sukant apie abscisių ašį kreivinę trapeciją, apribotą nurodyta kreive ir tiesėmis:
a) $y = x(x - 2)$, $y = 0$;
b) $y = x^{\frac{3}{2}}$, $y = 0$, $x = 4$;
c) $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$;
d) $y = \cos x$, $x = -\frac{\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{3}$, $y = 0$;
e) $y = \sqrt{\cos x}$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$;
f) $y = \operatorname{tg} x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$, $y = 0$;
g) $y = 1 + \sin x$, $x = 0$, $x = \frac{3\pi}{2}$, $y = 0$;
h) $y = \mathrm{e}^x - 1$, $x = 0$, $x = \ln 3$, $y = 0$.

63. Raskite tūrį kūno, gauto sukant apie Ox ašį figūrą, apribotą kreivėmis ir tiesėmis:
a) $y = -x^2 + x + 1$, $y = 1$;
b) $y = 2 + \sin x$, $y = 1$, $x = 0$, $x = \frac{3\pi}{2}$.

64. Kreivinė trapecija, apribota funkcijos $y = \sqrt{x}$ grafiku ir tiesėmis $y = 0$, $x = a$, sukama apie Ox ašį. Kokia turi būti a reikšmė, kad gauto kūno tūris būtų lygus 16π kubinių vienetų?

65. Karoliukas gaunamas sukant apie Ox ašį kreivinę trapeciją, apribotą kreive $y = rx(1 - x)$ ir tiese $y = 0$. Koks turi būti r, kad jo tūris būtų lygus π kubinių vienetų?

66. Per koordinačių pradžios tašką $O(0; 0)$ ir funkcijos $y = x^5$ grafiko tašką A su abscise $x = a$, $a > 0$, išvesta tiesė. Kartu su funkcijos grafiku ši tiesė apriboja tam tikrą sritį. Įrodykite, kad šios srities plotas lygus trečdaliui ploto stačiakampio, kurį apriboja koordinačių tiesės ir tiesės, einančios per tašką A lygiagrečiai koordinačių ašims.

67. Per funkcijos $y = -\frac{b}{a^2}x^2 + b$ ($a > 0$, $b > 0$) grafiko ir koordinačių ašių susikirtimo taškus $A(a; 0)$ ir $B(0; b)$ išvesta tiesė. Įrodykite, kad šios tiesės ir funkcijos grafiko apribotos figūros plotas lygus trečdaliui trikampio OAB ploto.

68. Pirmajame ketvirtyje į koordinačių ašis Ox ir Oy „atremiama“ l ilgio atkarpa. Per bendrus koordinačių ašių ir atkarpos taškus nubrėžiamas funkcijos $y = kx^2 + m$ grafikas — parabolė. Parabolės lankas ir atkarpa apriboja plokštumoje figūrą. Koks didžiausias galimas tokios figūros plotas?

Patarimas. Pasinaudokite 67 uždavinio teiginiu.

---

69. Stačiakampio $ABCD$ kraštinių ilgiai $AB = 10\,\text{cm}$ ir $BC = 20\,\text{cm}$. Jame nubrėžti dviejų parabolių lankai, abi kreivės eina per priešingas stačiakampio viršūnes A ir C, be to, taškas A yra abiejų parabolių viršūnė. Raskite plotą „lapo“, kurį šios kreivės išpjauna iš stačiakampio.

70. Stačiakampio $ABCD$ kraštinių ilgiai $AB = 10\,\text{cm}$ ir $BC = 20\,\text{cm}$. Jame nubrėžtas parabolės, einančios per priešingas stačiakampio viršūnes A ir C, lankas. Taškas A yra šios parabolės viršūnės taškas. Pjaunant pagal šį lanką iš stačiakampio atpjaunamas parabolinis „trikampis“. Iš likusios dalies reikia išpjauti stačiakampį, kurio viena viršūnė yra taške D, o kita — parabolės lanke.
a) Koks didžiausias galimas tokio stačiakampio plotas?
b) Kiek procentų stačiakampio ploto, atpjovus parabolinį trikampį ir didžiausio ploto stačiakampį, liks nepanaudota?

71. Tarkime, kad koordinačių pradžios taške yra kūnas, o mes, veikdami jį F didumo jėga, nukreipta Ox kryptimi, nustūmėme į tašką $Q(s; 0)$. Tada mūsų atliktas darbas $A = Fs$. Kai jėga matuojama niutonais (N), poslinkis metrais (m), tai darbas matuojamas džauliais (J). Jeigu stumdami kūną jėgos didumą keitėme, ir iki taško $P\left(\frac{s}{2}; 0\right)$ stūmėme jėga F_1, o toliau — jėga F_2, tai mūsų atliktas darbas $A = F_1 \cdot \frac{s}{2} + F_2 \cdot \frac{s}{2}$. Jeigu jėgos didumą keitėme daugiau kartų, tai ir darbo formulės suma turės daugiau dėmenų. Apskritai, jeigu jėga keitėsi nuolat ir $F(x)$ reiškia jėgos didumą tuo metu, kai kūnas buvo taške $X(x; 0)$, tai atliktas darbas

$$A = \int_0^s F(x)\,\mathrm{d}x.$$

Naudodami šią formulę apskaičiuokite, kokį darbą reikia atlikti, kad suspaustume $l = 12\,\text{cm}$ ilgio spyruoklę trečdaliu jos ilgio, jeigu žinoma, kad suspaudus (ar ištempus) ją x metrų, spyruoklės tamprumo jėga lygi $F = 100x$ niutonų.

72. Elektros krūvių sąveikos dėsnį nustatė prancūzų mokslininkas Ž. Kulonas, jo vardu vadinamas ir krūvių didumo matavimo vienetas kulonas. Dėsnis tvirtina, kad dviejų q_1 ir q_2 didumo taškinių krūvių, esančių vakuume r metrų atstumu vienas nuo kito, sąveikos jėga reiškiama formule $F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$, čia k — konstanta, kurios skaitinė vertė yra maždaug $9 \cdot 10^{-9}$; krūvių didumai reiškiami kulonais, jėgos — niutonais. Raskite darbą, kurį atlieka dviejų 10^{-3} kulonų didumo priešingų ženklų elektros krūvių sąveikos jėga, kai vienas iš krūvių nejuda, o kitas — veikiamas traukos jėgos priartėja prie pirmojo nuo 2 m pradinio atstumo iki 1 metro.

3. TIKIMYBĖS

3.1. ĮVYKIŲ TIKIMYBĖS

1. Kontrolinį darbą sudaro trys algebros ir trys geometrijos uždaviniai. Tikimybė, kad Saulius išspręs konkretų algebros uždavinį, yra 0,8, o tikimybė jam išspręsti konkretų geometrijos uždavinį lygi 0,6. Apskaičiuokite tikimybę išspręsti visus tris bent vieno dalyko uždavinius.

2. Automobilių stovėjimo aikštelėje prie namo yra 12 vietų, į kurias namo gyventojai stato savo automobilius atsitiktine tvarka. Kokia tikimybė, kad kaimynai Antanas, Jonas ir Petras pastatys savo automobilius vienas šalia kito?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

3. Du draugai, kiekvienas su savo drauge, nusprendė nueiti į teatrą. Jiems atnešė bilietus, kuriuose nurodytos tos pačios eilės keturios vietos: 8, 9, 10, 11. Draugai renkasi bilietus atsitiktinai. Kokia tikimybė, kad šalia kiekvieno iš vaikinų galės atsisėsti jo draugė?

4. Išspręskite 3 uždavinį, kai į teatrą susiruošė 3 draugai (kiekvienas su savo drauge) ir turi 6 bilietus tos pačios eilės vietoms: 8, 9, 10, 11, 12, 13.

5. Kortų kaladė, kurioje yra 52 kortos, dalijama į dvi lygias dalis. Kokia tikimybė, kad kiekvienoje dalyje bus po du tūzus?

6. Duota, kad tam tikro matavimo paklaida būna teigiama ir neigiama su vienodomis tikimybėmis $\frac{1}{2}$. Kokia tikimybė, kad atlikus tris matavimus, visos trys paklaidos bus teigiamos?

7. Į septynių aukštų namo liftą pirmame aukšte įlipo trys žmonės. Kiekvienas iš jų su vienoda tikimybe gali išlipti bet kuriame aukšte pradedant antruoju. Apskaičiuokite šių įvykių tikimybes:
a) A — visi trys žmonės išlips ketvirtame aukšte;
b) B — visi trys žmonės išlips tame pačiame aukšte;
c) C — visi trys žmonės išlips skirtinguose aukštuose.

8. Grupėje yra 10 moterų ir 5 vyrai. Kelionei kalnų maršrutais reikia susiskirstyti į penkias vienodo dydžio grupeles taip, kad kiekvienoje grupelėje būtų po vieną vyrą. Apskaičiuokite tikimybę, kad visiems penkiolikai atsitiktinai skirstantis į 5 vienodo didumo grupeles, šis reikalavimas bus išpildytas.

9. Atrakcionų parko žaidime dalyvaujanti dvidešimties žmonių grupė, kurioje vyrų ir moterų yra po lygiai, turi susiskirstyti po du. Kokia tikimybė, kad visiems 20 susiskirsčius po du atsitiktinai, kiekvieną porą sudarys moteris ir vyras?

10. Nupjovę tuščiavidurio plastmasinio kubelio $10\,\text{cm} \times 10\,\text{cm} \times 10\,\text{cm}$ vieną viršūnę, galėsime kubelį panaudoti litrui vandens parsinešti. Kokia tikimybė, kad nupjovę dvi atsitiktinai paimtas kubelio viršūnes, to padaryti negalėsime?

11. Tikimybė, kad gamykloje pagaminta stiklinė vaza yra įskilusi, lygi 0,004. Tikimybė, kad nusipirkus vazą parduotuvėje ji įskils vežant į namus, lygi 0,02. Kokia tikimybė, kad namo parsivešime neįskilusią vazą? Kokia tikimybė, kad nusipirkę dvi vazas, parsivešime namo bent vieną neįskilusią?

12. Sudėtingam žygiui formuojama trijų narių — vadovo, gydytojo ir vedlio — komanda. Sudarant komandą, vadovą reikia išrinkti iš trijų kandidatų — Jonaičio, Petraičio ir Povilaičio, gydytoją — iš keturių — Kazlausko, Petrausko, Ramanausko ir Jankausko, vedlį — iš dviejų — Petkaus ir Katkaus. Po psichologo testų paaiškėjo, kad Petraitis yra psichologiškai nesuderinamas su Kazlausku, Petrausku ir Katkumi. Taip pat psichologiškai nesuderinami yra Petrauskas ir Katkus. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai sudarius žygio komandą, visi jos nariai bus psichologiškai tarpusavyje suderinami?

13. Dėžėje yra 2 balti ir 4 juodi rutuliai. Tomas ir Paulius žaidžia paeiliui traukdami (daugiausiai po n kartų) iš dėžės po rutulį, kiekvieną kartą ištrauktąjį rutulį grąžindami atgal. Laimi tas, kuris pirmas ištrauks baltą rutulį; jei po $2n$ traukimų baltas rutulys neištraukiamas — lygiosios. Apskaičiuokite tikimybę, kad:
a) laimės Tomas; b) laimės Paulius; c) bus lygiosios.
Išspręskite uždavinį su $n = 1$, $n = 2$ ir $n = 3$.

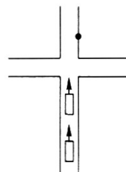
14. Dėžėje yra 2 balti ir 4 juodi rutuliai. Tomas ir Paulius žaidžia paeiliui traukdami iš dėžės po rutulį (negrąžindami atgal). Laimi tas, kuris pirmas ištrauks baltą rutulį. Apskaičiuokite tikimybę, kad laimės:
a) Tomas; b) Paulius.

15. Arbūzų pardavėjas parduoda penkis skirtingo svorio arbūzus. Trys draugai — Andrius, Bronius ir Tomas sumanė atsitiktinai pasirinkti ir nusipirkti po arbūzą.
a) Kokia tikimybė, kad Tomas nusipirks sunkiausią arbūzą?
b) Pirmas į turgų atėjo ir arbūzą nusipirko Andrius, antras — Bronius. Eidamas pirkti arbūzo Tomas sutiko Andrių ir Bronių ir sužinojo, kad Andriaus arbūzas lengvesnis už Broniaus. Kokia tikimybė, kad Tomas nusipirks sunkesnį arbūzą, negu jo draugai?

Patarimas. Galima laikyti, kad arbūzai sveria atitinkamai 1, 2, 3, 4, 5 kilogramus. Atveju a) tikimybė, kurią reikia apskaičiuoti — besąlyginė; atveju b) — sąlyginė.

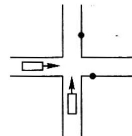
---

16. 1) Sankryžoje statmenai kertasi du keliai, sudarydami keturias kryptis. Šalia sankryžos vienoje iš krypčių stovi keleivis ir laukia pakeleivingo automobilio (automobilis visada paima pakeleivį). Iš keleivio krypčiai priešingos krypties atvažiuoja du automobiliai. Kokia tikimybė, kad keleiviui pavyks išvažiuoti? (Laikykite, kad tikimybės sankryžoje automobiliui pasirinkti kiekvieną iš 3 krypčių yra lygios.)



2) Sankryžoje statmenai kertasi du keliai, sudarydami keturias kryptis. Šalia sankryžos vienoje iš krypčių stovi keleivis ir laukia pakeleivingo automobilio (automobilis visada paima pakeleivį). Iš keleivio krypčiai statmenų krypčių atvažiuoja po vieną automobilį. Kokia tikimybė, kad keleiviui pavyks išvažiuoti? (Laikykite, kad tikimybės sankryžoje automobiliui pasirinkti kiekvieną iš 3 krypčių yra lygios.)

3) Sankryžoje statmenai kertasi du keliai, sudarydami keturias kryptis. Šalia sankryžos gretimose kryptyse stovi po vieną keleivį ir laukia pakeleivingo automobilio (automobilis visada paima pakeleivį). Iš toms kryptims priešingų krypčių atvažiuoja po vieną automobilį.



a) Kokia tikimybė, kad išvažiuoti pavyks abiem keleiviams?
b) Kokia tikimybė, kad išvažiuoti pavyks bent vienam keleiviui?

17. Du draugai susitarę visada susitinka vienoje iš trijų vietų, kurios yra gatvių, sudarančių trikampį, sankirtose. Susitarę dėl laiko, jie pamiršo susitarti, kurioje vietoje susitinka.
a) Kokia tikimybė, kad jie iš karto susitiks kurioje nors iš įprastinių vietų?
b) Kokia tikimybė, kad jie vis dėlto susitiks, jeigu kiekvienas jų, atėjęs į vieną iš vietų, bet draugo neradęs, atsitiktinai pasirenka kryptį (pagal arba prieš laikrodžio rodyklę) ir apeina visą trikampį?

18. Trys įvykiai A, B ir C tenkina sąlygas:
1) jų tikimybės

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = p;$$

2) visi trys įvykiai negali įvykti kartu;
3) poros A ir B, A ir C, B ir C yra nepriklausomų įvykių poros.
Su kokia tikimybės p reikšme tikimybė

$$\mathbf{P}(A \cup B \cup C)$$

didžiausia? Kokia ši tikimybė?

19. Kvadrato $ABCD$ kraštinė lygi a. Atsitiktinai iš intervalo $(0; \sqrt{2}a)$ pasirenkamas spindulys, kuriuo iš viršūnės A brėžiamas apskritimas. Kokia tikimybė, kad šis apskritimas kirs kraštines CB ir CD?

20. Trikampis ABC — lygiakraštis, kurio kraštinės ilgis yra a cm.
a) Kokia tikimybė, kad atsitiktinai trikampio viduje pažymėtas taškas bus nutolęs nuo trikampio viršūnės A ne daugiau kaip $\frac{a}{2}$ cm?
b) Kokia tikimybė, kad atsitiktinai trikampio viduje pažymėtas taškas bus nuo kiekvienos trikampio viršūnės nutolęs daugiau kaip $\frac{a}{2}$ cm?

21. Į skritulį, kurio spindulys R, įbrėžtas taisyklingasis šešiakampis. Kokia tikimybė, kad atsitiktinai paimtas skritulio taškas bus šešiakampio viduje?

22. Į taikinį mėtomas mažas sviedinukas, kurio spindulys $r = 2$ cm. Taikinyje užtušuotas skritulys, kurio spindulys $R = 25$ cm. Skritulyje yra kvadratinė kiaurymė, kurios kraštinė $a = 14$ cm. Atsitiktinai metamas sviedinukas visada pataiko į skritulį (t. y., kai sviedinukas pasiekia taikinį, jo centro projekcija yra skritulyje). Kokia tikimybė, kad šis sviedinukas pataikys į kiaurymę nepalietęs jos kraštų?

3.2. ATSITIKTINIAI DYDŽIAI

23. Lošėjas meta du kauliukus. Jeigu abu kauliukai atvirsta šešiomis akutėmis, tai lošėjas laimi 100 Lt, jeigu vienas atvirsta šešiuke — lošėjas laimi 10 Lt, kitais atvejais lošėjas nieko nelaimi.
a) Sudarykite bandymo baigčių aibę.
b) Užrašykite lygybes, apibrėžiančias išlošio dydį.
c) Sudarykite atsitiktinio dydžio, reiškiančio išlošį, skirstinį.
d) Koks šio atsitiktinio dydžio vidurkis?
e) Apskaičiuokite išlošio dispersiją.

24. Lošiama su kauliuku taip: jeigu metus lošimo kauliuką atvirto mažiau kaip 4 akutės, tai šis akučių skaičius ir yra mūsų lošimo rezultatas. Jeigu atvirto daugiau kaip 3 akutės, metame kauliuką dar kartą, o lošimo rezultatas — abiejuose metimuose atvirtusių akučių suma. Koks atsitiktinio dydžio, reiškiančio mūsų lošimo rezultatą, vidurkis?

25. Lošiama su kauliuku taip: jeigu metus lošimo kauliuką atvirto daugiau kaip 3 akutės, tai šis akučių skaičius ir yra mūsų lošimo rezultatas. Jeigu atvirto mažiau kaip 4 akutės, metame kauliuką dar kartą, o lošimo rezultatas — abiejuose metimuose atvirtusių akučių suma. Koks atsitiktinio dydžio, reiškiančio mūsų lošimo rezultatą, vidurkis?

26. Loterijoje yra 10 bilietų: 3 laimi po 2 litus, 4 po vieną litą, likusieji — nieko nelaimi. Koks išlošio vidurkis, jei įsigijome vieną bilietą? Koks išlošio vidurkis, jeigu įsigijome du bilietus?

***27.** Šešios knygos, tarp kurių yra dvi XII klasės matematikos vadovėlio dalys, atsitiktinai sudedamos viena ant kitos. Koks knygų, esančių tarp abiejų matematikos vadovėlio dalių, skaičiaus vidurkis? Kokia dispersija?

28. Laikraštyje yra šeši puslapiai. Tikimybė, kad puslapyje bus bent viena rašybos klaida, yra $0{,}1$. Tegu X — laikraščio puslapių su rašybos klaidomis skaičius.
a) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
b) Apskaičiuokite $\mathbf{E}X$ ir $\sigma(X)$.

29. Šaulys turi tris šovinius ir šaudo į taikinį iki pirmo nepataikymo (t. y. jei jis pirmu šūviu nepataiko, tai daugiau nebešaudo; jei pirmu šūviu pataiko, o antru — ne, tai daugiau nebešaudo, o jei ir antrą kartą pataiko, tai šauna trečią kartą, ir bet kuriuo atveju šis jo šūvis paskutinis). Tegu X — šaulio pataikymų skaičius.
a) Sudarykite bandymo baigčių aibę.
b) Užrašykite lygybes, apibrėžiančias atsitiktinį dydį X.
c) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.
d) Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X vidurkį ir dispersiją.

30. Metamos trys monetos. Tegu X — herbu atvirtusių monetų skaičiaus ir skaičiumi atvirtusių monetų skaičiaus sandauga. Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį, apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X skaitines charakteristikas $\mathbf{E}X$ ir $\mathbf{D}X$.

31. Išspręskite 30 uždavinį, kai metamos keturios monetos.

32. Matematikos žinių patikrinimo teste yra 4 klausimai. Duoti kiekvieno klausimo 5 atsakymai, iš kurių vienas teisingas. Mokinys atsakymus renkasi atsitiktinai. Tegu X — teisingai pasirinktų atsakymų skaičius. Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį ir apskaičiuokite $\mathbf{E}X$, $\mathbf{D}X$, $\sigma(X)$.

33. Matematikos žinių patikrinimo teste yra 10 klausimų. Į kiekvieną klausimą mokinys turi atsakyti „taip" arba „ne". Testas įskaitomas, kai teisingai atsakyta ne mažiau kaip į 8 klausimus. Kokia tikimybė, kad mokinys, surašęs atsakymus atsitiktinai, gaus įskaitą?

34. Tikimybė, kad krepšininkas mesdamas kamuolį į krepšį iš tam tikros aikštės vietos pataikys, lygi 0,5. Kas labiau tikėtina — ar kad jis pataikys ne mažiau kaip 3 kartus iš keturių metimų, ar ne mažiau kaip 4 kartus iš šešių metimų?

35. Kiek kartų reikia mesti lošimo kauliuką, kad 6 akutės bent vieną kartą iškristų su tikimybe, didesne negu:
a) 0,7; b) 0,8; c) 0,9?

36. Tikimybė, kad atlikus 4 nepriklausomus bandymus įvykis A įvyks bent vieną kartą, lygi 0,9744. Kokia tikimybė, kad įvykis A įvyks atlikus vieną bandymą?

37. Siūlų partijos kokybė tikrinama tempiant keturis siūlus vieną po kito tam tikra jėga. Tikimybė, kad siūlas atlaikys bandymą, lygi $\frac{4}{5}$. Kai tik kuris nors siūlas nutrūksta, bandymai baigiami. Tegu X — atliktų bandymų skaičius. Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį ir apskaičiuokite, kiek vidutiniškai įvyks tokių bandymų.

38. Tarnautojas, važiuodamas automobiliu iš namų į darbą, turi pravažiuoti keturias šviesoforais reguliuojamas sankryžas. Tikimybė pravažiuoti sankryžą degant žaliam šviesoforo signalui yra 0,5. Nuo kelionės pradžios iš eilės „degančių žaliai" šviesoforų skaičių pažymėkime X. Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį ir apskaičiuokite vidutinį „duodančių žalią gatvę" šviesoforų skaičių $\mathbf{E}X$.

39. Du draugai susitarę visada susitinka vienoje iš trijų vietų, kurios yra gatvių, sudarančių taisyklingąjį trikampį, vietose. Susitarę dėl laiko, jie pamiršo susitarti, kurioje vietoje susitinka. Kiekvienas iš jų, atėjęs į vieną iš vietų, bet draugo neradęs, atsitiktinai pasirenka kryptį (pagal arba prieš laikrodžio rodyklę) ir eidamas ta kryptimi tikisi draugą susitikti. Tarkime, kad einant iš vienos vietos į kitą, užtrunkama dešimt minučių. Ieškant draugo daugiausiai galima sugaišti dešimt minučių (aišku, jeigu susitikimas neįvyksta per dešimt minučių, tai jis nebeįvyks ir vėliau), mažiausiai — nulį minučių (kai draugai iškart ateina į tą pačią vietą). Jeigu, pavyzdžiui, vienas atėjo į vietą A, o kitas į B ir neradę vienas kito pradėjo eiti priešpriešiais, tai susitikimas įvyks po 5 minučių; jeigu vienas atėjo į A, kitas į C ir abu pradėjo eiti į B, tai jie susitiks po 10 minučių. Koks ieškant draugo sugaišto laiko vidurkis? Kokia dispersija?

40. Išspręskite 39 uždavinį su sąlyga, kad yra ne trys, bet keturios įprastinės draugų susitikimo vietos, kurios yra gatvių sudaryto keturkampio viršūnėse.

41. Dviratininkas važinėja takeliais, kurie eina kvadrato kraštinėmis ir įstrižainėmis. Kvadrato kraštinės ilgis — 100 metrų. Kvadrato viršūnėse, taip pat ir įstrižainių susikirtimo taške dviratininkas atsitiktinai pasirenka važiavimo kryptį, tačiau niekada negrįžta atgal. Kelią nuo vieno taško iki kito pavadinsime kelio atkarpa. Dviratininkas pradeda važiuoti iš vienos viršūnės. Koks trijų atkarpų kelio ilgio vidurkis? Kokia dispersija?

42. Skruzdėlė ropinėja vielinės tvoros kvadratinių langelių kraštinėmis, atsitiktinai keisdama kryptį kvadratinių langelių viršūnėse. Langelio kraštinei įveikti jai reikia vienos sekundės.

a) Apskaičiuokite skruzdėlės atstumo nuo starto vietos vidurkį praėjus trims sekundėms, jeigu langelio kraštinės ilgis lygus 1 cm.

b) Apskaičiuokite skruzdėlės atstumo nuo starto vietos vidurkį praėjus trims sekundėms, jeigu skruzdėlė niekada nesirenka kelio į tą viršūnę, iš kurios ką tik atropojo.

c) Apskaičiuokite skruzdėlės atstumo nuo starto vietos vidurkį praėjus trims sekundėms, jeigu skruzdėlė niekada nesirenka krypties žemyn.

43. Voratinklis yra taisyklingojo šešiakampio formos, iš jo viršūnių į centrą taip pat nutiesti siūlai, šešiakampio kraštinės ilgis lygus 5 cm. Iš voratinklio centro atsitiktinai pasirinkęs kryptį pajuda voras, kurio tikslas — patekti į voratinklio (taisyklingojo šešiakampio) viršūnę A. Jeigu pirmoji jo pasiekta viršūnė ne A, voras atsitiktinai pasirenka kryptį ir ropoja šešiakampio kraštinėmis tol, kol pasiekia savo tikslą. Koks voro nueito kelio vidurkis?

44. Iš kišenės, kurioje yra 2, 5, 10, 20 ir 50 ct monetos, atsitiktinai pasirenkamos trys monetos. Pažymėkime X, Y ir Z atitinkamai mažiausią, vidutinę ir didžiausią pasirinktų monetų vertes. Raskite atsitiktinių dydžių X, Y, Z vidurkius ir dispersijas. Ar atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi?

45. Atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi, o jų skirstiniai tokie:

m	1	2	3	4
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$

m	0	1
$\mathbf{P}(Y = m)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

a) Parašykite atsitiktinių dydžių poros (X, Y) skirstinį.

b) Parašykite atsitiktinio dydžio $Z = X \cdot Y$ skirstinį (atsitiktinio dydžio $X \cdot Y$ reikšmės yra atsitiktinio dydžio X reikšmių x ir atsitiktinio dydžio Y reikšmių y visos galimos sandaugos; nepamirškite, kad ne visada $\mathbf{P}(Z = x \cdot y) = \mathbf{P}(X = x, Y = y)$ — kai kelios X ir Y reikšmių kombinacijos duoda tą pačią Z reikšmę, atitinkamas tikimybes reikia sudėti).

c) Apskaičiuokite $\mathbf{E}X$, $\mathbf{E}Y$, $\mathbf{E}Z$ ir įsitikinkite, kad $\mathbf{E}(X \cdot Y) = \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y$.

d) Apskaičiuokite $\mathbf{D}X$, $\mathbf{D}Y$, $\mathbf{D}Z$.

46. Atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra nepriklausomi, o jų skirstiniai tokie:

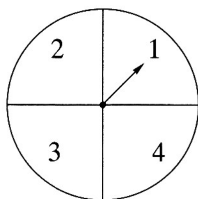
m	5	6
$\mathbf{P}(X = m)$	0,6	0,4

m	0	1
$\mathbf{P}(Y = m)$	0,2	0,8

a) Parašykite atsitiktinių dydžių poros (X, Y) skirstinį.

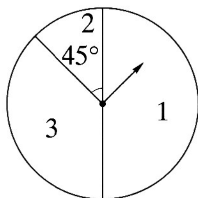
b) Parašykite atsitiktinio dydžio $Z = X + Y$ skirstinį (atsitiktinio dydžio $X + Y$ reikšmės yra atsitiktinio dydžio X reikšmių x ir atsitiktinio dydžio Y reikšmių y visos galimos sumos $x + y$; nepamirškite, kad ne visada $\mathbf{P}(Z = x + y) = \mathbf{P}(X = x, Y = y)$ — kai kelios X ir Y reikšmių kombinacijos duoda tą pačią Z reikšmę, atitinkamas tikimybes reikia sudėti).
c) Apskaičiuokite $\mathbf{E}X$, $\mathbf{E}Y$, $\mathbf{E}Z$. Patikrinkite, ar $\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}X + \mathbf{E}Y$.
d) Apskaičiuokite $\mathbf{D}X$, $\mathbf{D}Y$, $\mathbf{D}Z$. Patikrinkite, ar $\mathbf{D}(X + Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y$.

47. Lošimo ratas suskirstytas į 4 vienodo dydžio sektorius, sunumeruotus skaičiais 1, 2, 3, 4:



Lošiama sukant ratą du kartus ir užrašant rezultatus — sektorių, kuriuose atsidūrė rodyklė, numerius. Be to, jis įrengtas taip, kad antrą kartą pasukus ratą, rodyklė negali atsidurti tame pačiame sektoriuje, kuriame buvo po pirmo pasukimo. Tegu X yra dviejų pasukimų mažesnysis rezultatas, o Y — didesnysis.
a) Sudarykite atsitiktinių dydžių X ir Y skirstinius.
b) Sudarykite atsitiktinių dydžių poros (X, Y) skirstinį.
c) Nustatykite, ar dydžiai X ir Y yra priklausomi.

48. Lošimo ratas suskirstytas į 3 sektorius taip:



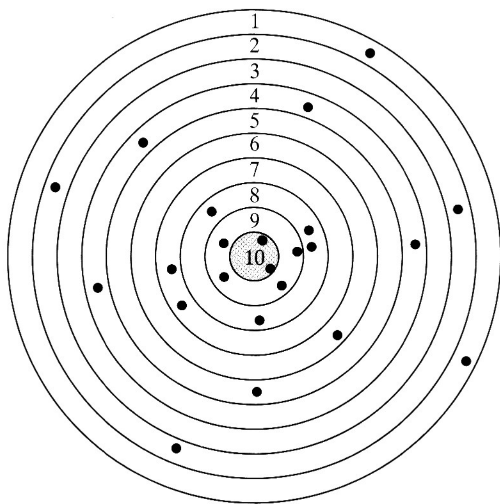
Lošiama sukant ratą du kartus ir užrašant rezultatus — sektorių, kuriuose atsidūrė rodyklė, numerius. Be to, jis įrengtas taip, kad antrą kartą pasukus ratą, rodyklė negali atsidurti tame pačiame sektoriuje, kuriame buvo po pirmo pasukimo. Tegu X yra dviejų pasukimų mažesnysis rezultatas, o Y — didesnysis.
a) Sudarykite atsitiktinių dydžių X ir Y skirstinius.
b) Sudarykite atsitiktinių dydžių poros (X, Y) skirstinį.
c) Parodykite, kad dydžiai X ir Y yra priklausomi.
d) Apskaičiuokite $\mathbf{E}X$ ir $\mathbf{E}Y$.

4. STATISTIKA

1. Perskaitykite šio uždavio sąlygą ir sudarykite imtį, išrašydami pirmąsias žodžių raides. Sudarykite dažnių lentelę, nubraižykite stulpelinę santykinių dažnių diagramą. Suraskite imties modą. Apskaičiuokite šią dažnių lentelę vaizduojančios skritulinės diagramos sektorių centrinius kampus.

2. Peržiūrėkite 1–3 uždavinių sąlygas ir sudarykite imtį, užrašydami kiekvienos teksto eilutės žodžių skaičių. Sudarykite dažnių lentelę, nubraižykite stulpelinę santykinių dažnių diagramą. Suraskite imties modą. Apskaičiuokite šią dažnių lentelę vaizduojančios skritulinės diagramos sektorių centrinius kampus.

3. Brėžinyje pavaizduotas taikinys ir šaudymo į jį rezultatai. Sudarykite šūviais pelnytų taškų imtį. Sudarykite dažnių lentelę, nubraižykite stulpelinę santykinių dažnių diagramą. Suraskite imties modą. Apskaičiuokite šią dažnių lentelę vaizduojančios skritulinės diagramos sektorių centrinius kampus.



4. Disko metiko dvidešimties metimų rezultatai (metrais) tokie: 59,95; 60,93; 62,62; 58,32; 59,26; 59,30; 60,68; 59,04; 58,58; 62,40; 60,68; 57,71; 60,53; 60,95; 59,51; 58,58; 59,51; 59,48; 59,90; 59,37. Sugrupuokite imtį ir nubraižykite histogramą.

5. Kompiuteris įsirašė į atmintį, kiek minučių per dieną buvo naršoma internete. Gauti tokie duomenys: 123, 108, 121, 124, 114, 123, 126, 121, 114, 113, 118, 118, 118, 115, 123, 128, 113, 122, 113, 120, 117, 117, 120, 131, 122, 111, 111, 125, 123, 120. Sugrupuokite juos (pavyzdžiui, 5 minučių intervalais) ir nubraižykite histogramą.

6. 2001 metais įvykusio Lietuvos gyventojų surašymo duomenimis, Lietuvos savivaldybėse tūkstančiui gyventojų, turinčių 10 ir daugiau metų, teko žmonių su aukštuoju išsilavinimu: 124, 133, 51, 60, 74, 207, 119, 111, 82, 138, 77, 70, 65, 144, 180, 122, 73, 84, 55, 73, 89, 40, 67, 64, 56, 121, 64, 73, 70, 59, 76, 131, 70, 65, 63, 57, 68, 78, 43, 52, 76, 90, 80, 54, 74, 157, 77, 68, 67, 98, 75, 231, 94, 66, 69, 72, 87, 95, 78. Raskite šios imties kvartilius ir vidurkį.

7. Imtį sudaro 16 duomenų. Pirmieji sutvarkytos didėjimo tvarka imties duomenys yra 1; 1,5; 2; 3; 3; 3; 4; ...
a) Raskite šios imties pirmąjį kvartilį.
b) Kiek daugiausiai duomenų, didesnių už rastąjį kvartilį, galima pridėti prie šios imties, kad naujosios (didesnės) imties pirmasis kvartilis būtų toks pat kaip pirmosios imties?
c) Kiek daugiausiai duomenų, mažesnių už rastąjį kvartilį, galima pridėti prie šios imties, kad naujosios (didesnės) imties pirmasis kvartilis būtų toks pat kaip pirmosios imties?

8. Imtį sudaro 30 duomenų. Imties pirmasis kvartilis lygus vienai iš duomenų reikšmių, šios reikšmės sukauptasis dažnis yra 0,3. Kiek daugiausiai duomenų, didesnių už pirmąjį kvartilį, būtų galima pridėti prie imties, kad šitaip gautos didesnės imties pirmasis kvartilis būtų lygus pradinės imties pirmajam kvartiliui?

9. Peržiūrėkite šio skyrelio pirmo uždavinio sąlygą, ir sudarykite imtį, užrašydami kiekvieno sąlygos žodžio raidžių skaičių. Suraskite gautosios imties modą, kvartilius, vidurkį ir dispersiją.

10. Imtyje yra penkiolika skaitinių duomenų. Imties vidurkis lygus nuliui. Iš šios imties išbraukiame duomenį, kurio reikšmė lygi 2. Koks yra gautos mažesnės imties vidurkis?

11. Imtyje yra dvidešimt skaitinių duomenų. Imties vidurkis lygus penkiems. Iš šios imties išbraukiame duomenis -1, 2, 3 ir 5. Koks yra gautos mažesnės imties vidurkis?

12. Algis užrašė aštuonis duomenis ir apskaičiavęs savo imties vidurkį gavo 6. Jonas užrašė 12 duomenų, jo imties vidurkis lygus 7. Koks imties, sudarytos iš Algio ir Jono duomenų, vidurkis?

13. Imties iš dešimties duomenų vidurkis lygus 4, o dispersija 1. Kitos imties iš penkiolikos duomenų vidurkis taip pat lygus 4, o dispersija 2. Jeigu naują imtį sudarytume iš pirmosios ir antrosios imties duomenų, koks būtų tokios imties vidurkis ir kokia dispersija?

Patarimas. Imties, kurios duomenys yra $x_1, x_2, \dots, x_n$, dispersija vadiname skaičių $s^2 = \frac{1}{n-1}\big((x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + \dots + (x_n - \overline{x})^2\big)$.
Pertvarkant šį reiškinį galima įrodyti, kad dispersiją galima išreikšti ir taip:
$s^2 = \frac{1}{n-1}\big(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2\big) - \frac{n}{n-1}\overline{x}^2$.
Sprendžiant uždavinį patogiau pasinaudoti šia formule.

---

14. Dešimt žaidėjų po 20 kartų metė kamuolį į krepšį. Tikslių metimų skaičiai tokie: 13, 11, 12, 12, 10, 14, 9, 11, 10, 9.
a) Raskite šios imties kvartilius.
b) Atmeskime blogiausiąjį (geriausiąjį) rezultatą. Kokie bus gautos mažesnės imties kvartiliai?

15. Peržiūrėkite šio uždavinyno integralų skyriaus 2 uždavinio sąlygos dalies a)–f) ir kievienai iš jų suskaičiuokite, kiek jai užrašyti panaudota matematinių ženklų (skaitmenų, aritmetinių veiksmų ženklų, skliaustų, šaknies ženklų) ir atskirai — kiek raidžių. Šitaip gausite dvi iš natūraliųjų skaičių sudarytas imtis. Apskaičiuokite abiejų imčių vidurkius, dispersijas, o taip pat — imčių dydžių koreliacijos koeficientą.

16. Suskaičiuokite, kiek kiekviename šio uždavinio sąlygos žodyje yra balsių ir kiek priebalsių. Gausite dvi imtis, sudarytas iš natūraliųjų skaičių. Apskaičiuokite abiejų imčių vidurkius ir dispersijas, o taip pat — balsių ir priebalsių kiekių koreliacijos koeficientą.

17. Dešimties moksleivių matematikos, fizikos ir istorijos kontrolinių darbų įvertinimai tokie:

matematikos: 8, 8, 6, 4, 9, 10, 8, 7, 7, 9;
fizikos: 8, 9, 6, 6, 8, 10, 9, 8, 6, 8;
istorijos: 5, 7, 8, 6, 8, 10, 9, 10, 7, 10.

Apskaičiuokite matematikos ir fizikos pažymių bei matematikos ir istorijos pažymių koreliacijos koeficientą. Kurie įvertinimai: matematikos ir fizikos ar matematikos ir istorijos yra labiau tarpusavyje susiję?

18. Danijos gyventojai iki 15 metų amžiaus UNESCO duomenimis 1980, 1985, 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996 ir 1997 metais sudarė atitinkamai

21%, 18%, 17%, 17%, 17%, 17%, 17%, 17%, 17%, 17%

gyventojų skaičiaus, o mokyklinio amžiaus gyventojai atitinkamai

18%, 17%, 15%, 15%, 14%, 14%, 14%, 13%, 13%, 13%.

Apskaičiuokite šių imčių koreliacijos koeficientą.

19. Latvijos gyventojai iki 15 metų amžiaus UNESCO duomenimis 1980, 1985, 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996 ir 1997 metais sudarė atitinkamai

20%, 21%, 21%, 21%, 21%, 21%, 21%, 21%, 20%, 20%

gyventojų skaičiaus, o mokyklinio amžiaus gyventojai atitinkamai

17%, 16%, 16%, 17%, 16%, 17%, 17%, 17%, 18%, 18%.

Apskaičiuokite šių imčių koreliacijos koeficientą.

20. Lietuvos gyventojai iki 15 metų amžiaus UNESCO duomenimis 1980, 1985, 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996 ir 1997 metais sudarė atitinkamai

24%, 23%, 23%, 22%, 22%, 22%, 22%, 22%, 21%, 21%

gyventojų skaičiaus, o mokyklinio amžiaus gyventojai atitinkamai

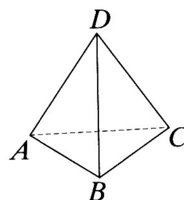
20%, 19%, 18%, 18%, 17%, 18%, 18%, 18%, 18%, 18%.

Apskaičiuokite šių imčių koreliacijos koeficientą.

5. STEREOMETRIJA. VEKTORIAI. ERDVINIAI KŪNAI

5.1. TIESĖS IR PLOKŠTUMOS

1. $ABCD$ — tetraedras. Nurodykite tarpusavio padėtis tiesių: AB ir CD, AB ir BC, BC ir AD, BD ir AD.



2. Kiek skirtingų tiesių gausime išvedę tieses per visas kubo viršūnių poras?

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — stačiakampis gretasienis. Surašykite šio gretasienio briaunas, kurios yra tiesėse, prasilenkiančiose:
a) su tiese BC; b) su tiesėmis BC ir AA_1.

4. Nubrėžta kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ įstrižainė AC_1. Surašykite tieses, prasilenkiančias su tiese AC_1, ir einančias per dvi kubo viršūnes.

5. Duoti keturi erdvės taškai. Parinkus taškų porą per juos nubrėžiama tiesė. Kiek skirtingų tiesių galima šitaip gauti? Išnagrinėkite visus atvejus.

6. Tiesės AB ir CD yra lygiagrečios.
a) Ar tiesės AC ir BD gali būti prasilenkiančios?
b) Ar tiesės AC ir BD gali kirstis?
Atsakymą pagrįskite.

7. Tiesės MN ir KL yra prasilenkiančios.
a) Ar tiesės MK ir NL gali būti lygiagrečios?
b) Ar tiesės MK ir NL gali kirstis?
Atsakymą pagrįskite.

8. Tiesė a yra plokštumoje α, o tiesė b su plokštuma α neturi bendrų taškų. Kokia gali būti tiesių a ir b trapusavio padėtis?

9. Įrodykite, kad per bet kurią erdvės tiesę galima išvesti plokštumą.

10. Prieštaros metodu įrodykite teoremą: „Per tiesę ir jai nepriklausantį tašką galima išvesti tiktai vieną plokštumą“.

11. Įrodykite, kad per tiesę erdvėje galima išvesti dvi skirtingas plokštumas.

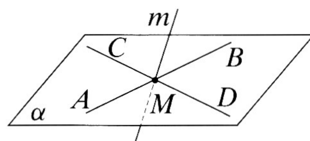
12. Įrodykite teoremą: „Jeigu du tiesės taškai priklauso plokštumai, tai ir visa tiesė priklauso tai plokštumai“.

13. Tiesės a ir b susikerta taške O. Įrodykite, kad visos tiesės, kertančios tieses a ir b ir neinančios per tašką O, yra vienoje plokštumoje.

14. Tiesės a ir b yra arba lygiagrečios arba susikertančios. Taškai A ir A_1 yra tiesėje a, taškai B ir B_1 — tiesėje b. Ką galima pasakyti apie tiesių AB ir A_1B_1 tarpusavio padėtį?

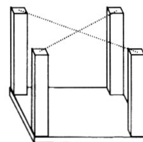
15. Duoti penki erdvės taškai, nesantys vienoje plokštumoje. Ar gali keturi iš šių taškų priklausyti vienai plokštumai?

16. Per tiesių AB ir CD suskirtimo tašką M nubrėžta tiesė m, nesanti vienoje plokštumoje su šiomis tiesėmis. Įrodykite, kad tiesės m ir AD nesusikerta.



17. Duotos keturios tiesės. Kiekvienos dvi jų susikerta. Įrodykite, kad visos duotosios tiesės yra vienoje plokštumoje arba eina per vieną tašką.

18. Padarius keturkampę kėdutę ir ją apvertus, buvo ištemptos virvutės taip, kaip parodyta paveiksle. Tos virvutės nesusilietė. Kokią išvadą turėjo padaryti meistras?



19. Taškai M, N ir K yra plokštumoje β. Įrodykite, kad tiesės MN, NK ir MK yra plokštumoje β.

20. Taškai A, B, C ir D nėra vienoje plokštumoje. Įrodykite, kad tiesės AB ir CD nesusikerta.

21. Tiesės m ir n yra lygiagrečios plokštumai α. Kokia gali būti tiesių m ir n tarpusavio padėtis?

22. Trikampio ABC aukštinės susikerta taške O. Taškas D — kraštinės BC vidurio taškas. Taškas E nepriklauso trikampio plokštumai. Kada per tiesę AE bei taškus O ir D galima nubraižyti plokštumą? Atsakymą pagrįskite.

23. Taškas O — į lygiašonį trikampį ABC įbrėžto apskritimo centras, M — pagrindo AC vidurio taškas, taškas K nėra trikampio ABC plokštumoje. Ar galima nubraižyti plokštumą per tiesę BK bei taškus O ir M? Atsakymą pagrįskite.

24. Taškas O — apie stačiakampį $ABCD$ apibrėžto apskritimo centras. Taškas E nepriklauso plokštumai, einančiai per taškus A, B, C. Ar galima nubraižyti plokštumą per tiesę AE bei taškus C ir O? Atsakymą pagrįskite.

25. Jei du apskritimo taškai priklauso plokštumai α, tai ar apskritimas priklausys plokštumai α? Išnagrinėkite galimus atvejus.

26. Tiesė AB lygiagreti tiesei MN. Tiesės AC ir MN yra prasilenkiančios. Raskite kampo tarp tiesių AC ir MN didumą, jei:
a) $\angle BAC = 45°$; b) $\angle BAC = 115°$.

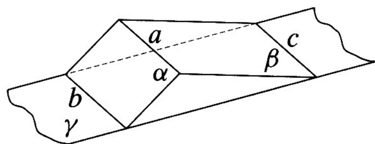
27. Tiesė m yra lygiagreti rombo $ABCD$ įstrižainei AC, bet nėra rombo plokštumoje. Įrodykite, kad tiesė m yra prasilenkianti su kraštine AD. Raskite kampo tarp tiesių m ir AD didumą, jei:
a) $\angle ABC = 140°$; b) $\angle ABC = 46°$.

28. Tiesė a yra lygiagreti rombo $ABCD$ kraštinei BC, bet nėra rombo plokštumoje. Įrodykite, kad tiesė a yra prasilenkianti su kraštine DC. Raskite kampo tarp tiesių a ir DC didumą, jei rombo vieno kampo didumas yra:
a) 70°; b) 120°.

***29.** Duotos dvi prasilenkiančios tiesės a ir b bei taškas A, nepriklausantis toms tiesėms. Prieštaros metodu įrodykite, kad egzistuoja ne daugiau kaip viena tiesė, einanti per tašką A ir kertanti abi duotąsias tieses.

30. Įrodykite, kad jeigu plokštuma kerta vieną iš lygiagrečių tiesių, tai ji kerta ir kitą.

31. Duota: $\alpha \cap \beta = a$,
$\alpha \cap \gamma = b$,
$\beta \cap \gamma = c$,
$b \parallel c$.
Įrodykite: $a \parallel \gamma$.



32. Plokštumos α ir β kertasi tiese m. Tiesė a yra plokštumoje α, o tiesė b — plokštumoje β. Ar gali tiesės a ir b būti:
a) lygiagrečios; b) susikertančios; c) prasilenkiančios?
Atsakymus pavaizduokite brėžiniais.

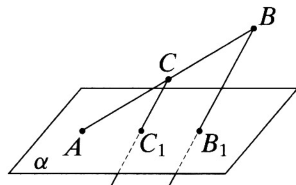
33. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — kubas, kurio briauna lygi a. Raskite atstumą nuo taško A iki:
a) briaunos CD; b) tiesės B_1D_1; c) tiesės B_1D.

34. Įrodykite, kad plokštuma α ir joje nesanti tiesė a yra lygiagrečios, jeigu jos yra statmenos tai pačiai tiesei m.

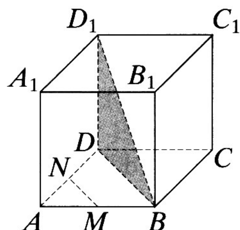
35. Taškas E nėra lygiagretainio $ABCD$ plokštumoje. Įrodykite, kad tiesė CD yra lygiagreti plokštumai ABE.

36. Trapecijos vidurinė linija yra plokštumoje α. Ar trapecijos pagrindai yra lygiagretūs plokštumai α? Atsakymą pagrįskite.

37. Per atkarpos AB tašką A išvesta plokštuma α, o per tašką B ir atkarpos AB vidurio tašką C išvestos lygiagrečios tiesės, kurios kerta plokštumą α taškuose B_1 ir C_1.
Įrodykite, kad:
a) taškai A, C_1 ir B_1 yra vienoje tiesėje;
b) CC_1 yra trikampio ABB_1 vidurinė linija.



38. Taškai M ir N yra kubo briaunų AB ir AD vidurio taškai.
Įrodykite, kad:
a) tiesė MN yra lygiagreti tiesei BD;
b) tiesė MN yra lygiagreti plokštumai DBD_1.



39. Lygiagretainis $ABCD$ ir trapecija $ABEF$ ($AB \parallel EF$) nėra vienoje plokštumoje. Koks keturkampis $CDFE$? Atsakymą pagrįskite.

40. Kubo briaunos ilgis yra m. Per kubo viršūnę A_1 ir briaunos DD_1 vidurio tašką E išvesta tiesė, kertanti plokštumą $ABCD$ taške F. Raskite atkarpos B_1F ilgį.

41. Atkarpa AB nekerta plokštumos α. Per atkarpos AB galus ir jos vidurio tašką C nubrėžtos lygiagrečios tiesės, kertančios plokštumą α atitinkamai taškuose A_1, B_1 ir C_1. Raskite atkarpos CC_1 ilgį, jei:
a) $AA_1 = 3{,}2\,\mathrm{dm}$, $BB_1 = 4{,}8\,\mathrm{dm}$; b) $AA_1 = 2a$, $BB_1 = a + 4$.

42. Atkarpos BD taškas B yra plokštumoje β. Taškas C dalija šią atkarpą santykiu $4 : 5$, skaičiuojant nuo taško B. Per taškus C ir D nubrėžtos lygiagrečios tiesės, kertančios plokštumą β atitinkamai taškuose C_1 ir D_1. Raskite atkarpos DD_1 ilgį, jei:
a) $CC_1 = 18\,\mathrm{mm}$; b) $CC_1 = a$.

43. Per atkarpos AB galą B išvesta plokštuma, o per galą A ir atkarpos tašką C — lygiagrečios tiesės, kurios plokštumą kerta taškuose A_1 ir C_1. Raskite atkarpos AA_1 ilgį, jei:
a) $AC = BC$, $CC_1 = 15{,}6\,\mathrm{m}$; b) $BC : CC_1 = 4 : 3$, $AB = 2{,}3\,\mathrm{dm}$.

44. Trikampis MNK ir trapecija $MNPR$ nėra vienoje plokštumoje. Trapecijos pagrindai $MN = 14{,}2\,\mathrm{cm}$, $PR = 8{,}6\,\mathrm{cm}$.
a) Įrodykite, kad trapecijos vidurinė linija yra lygiagreti trikampio plokštumai.
b) Apskaičiuokite ilgį trikampio vidurinės linijos, einančios per kraštinių MK ir NK vidurio taškus.
c) Ar trikampio vidurinė linija lygiagreti trapecijos plokštumai? Atsakymą pagrįskite.
d) Apskaičiuokite trikampio ir trapecijos plotus, jei taškai R ir K nuo trikampio ir trapecijos plokštumų susikirtimo linijos nutolę 6 cm atstumu.

45. Per atkarpos AB tašką A išvesta plokštuma α. Taškas B nutolęs nuo plokštumos α 16 cm atstumu. Apskaičiuokite atstumą nuo atkarpos AB vidurio taško iki plokštumos α.

46. Į trikampį įbrėžto apskritimo spindulio ilgis lygus 9 cm. Iš apskritimo centro O nubrėžtas 12 cm ilgio statmuo OM į trikampio plokštumą. Raskite atstumą nuo taško M iki trikampio kraštinių.

47. Taškas K yra šalia stačiakampio $ABCD$ plokštumos. Tiesė KA statmena tiesėms AB ir AD. Įrodykite, kad tiesė KA statmena tiesei AC. Raskite atkarpos KC ilgį, jei $AB = 6\,\mathrm{cm}$, $AD = 8\,\mathrm{cm}$, $KA = 10\,\mathrm{cm}$.

48. Lygiašonio trikampio ABC pagrindo BC ilgis lygus 10 dm, o šoninės kraštinės ilgis yra 13 dm. Iš viršūnės A nubrėžta atkarpa AD, kurios ilgis yra 5 dm ir kuri yra statmena plokštumai ABC. Raskite atstumą nuo taško D iki kraštinės BC.

49. Įrodykite:
a) jei taškas, esantis šalia daugiakampio plokštumos, yra vienodai nutolęs nuo to daugiakampio viršūnių, tai iš to taško nubrėžto statmens į plokštumą pagrindas yra apibrėžto apie šį daugiakampį apskritimo centras;
b) jei taškas, esantis šalia daugiakampio plokštumos, yra vienodai nutolęs nuo to daugiakampio kraštinių, tai iš to taško nubrėžto statmens į plokštumą pagrindas yra įbrėžto į tą daugiakampį apskritimo centras.

50. Lygiakraščio trikampio kraštinės ilgis yra 15 cm. Apskaičiuokite atstumą nuo trikampio plokštumos iki taško, kuris:
a) nuo kiekvienos trikampio viršūnės nutolęs 20 cm atstumu;
b) nuo kiekvienos trikampio kraštinės nutolęs 10 cm atstumu.

51. Lygiakraščio trikampio kraštinės ilgis yra 6 cm. Šalia trikampio plokštumos esantis taškas nuo kiekvienos trikampio viršūnės nutolęs 4 cm atstumu. Apskaičiuokite atstumą nuo šio taško iki trikampio plokštumos.

52. Į trikampį įbrėžto apskritimo spindulio ilgis yra 1,4 dm. Iš apskritimo centro trikampio plokštumai iškeltas statmuo, kurio ilgis yra 4,8 dm. Apskaičiuokite atstumus nuo statmens galų iki trikampio kraštinių.

53. Stačiojo trikampio statinių ilgiai yra 3 cm ir 4 cm. Taškas A yra vienodai nutolęs nuo visų trikampio kraštinių, o nuo trikampio plokštumos nutolęs 6 cm atstumu. Koks atstumas nuo taško A iki trikampio kraštinių?

54. Atstumas nuo taško iki trikampio plokštumos yra 110 mm, o iki kiekvienos trikampio kraštinės — po 610 mm. Apskaičiuokite į šį trikampį įbrėžto apskritimo spindulio ilgį.

55. Taškas M nutolęs nuo trikampio ABC viršūnių atstumu a. Apskaičiuokite atstumą MO nuo taško M iki trikampio plokštumos, jei $\angle MAO = \alpha$.

56. Taškas O nutolęs nuo trikampio ABC kraštinių atstumu $OD = OE = OF = b$. Apskaičiuokite atstumą OM nuo taško O iki trikampio plokštumos, jei $\angle DOM = \beta$.

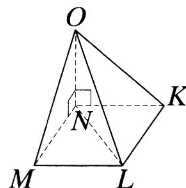
***57.** Taškas A nutolęs nuo trikampio viršūnių 8 cm atstumu, o nuo kraštinių — 5 cm atstumu. Apskaičiuokite atstumą nuo taško A iki trikampio plokštumos.

58. Iš taško M į plokštumą α nubrėžtas statmuo MA ir pasviroji MB. Per tašką B plokštumoje α nubrėžta tiesė b, statmena tiesei AB. Raskite atstumą nuo taško M iki tiesės b, jei $MA = 7{,}5$ m, $AB = 4$ m.

59. Taisyklingojo šešiakampio kraštinės ilgis yra 10 cm. Iš šešiakampio viršūnės A jo plokštumai iškeltas statmuo AM, kurio ilgis yra 5 cm. Apskaičiuokite atstumus nuo taško M iki šešiakampio kraštinių.

60. Iš taisyklingojo šešiakampio $ABCDEF$ centro O nubrėžtas statmuo OK jo plokštumai. Apskaičiuokite atkarpos OK ilgį, jei $AB = 12$ m, $AK = 15$ m.

61. $\angle ONM = \angle ONK = 90°$. Nustatykite trikampio ONL rūšį (pagal kampus).



62. Iš taško, esančio šalia plokštumos, nubrėžtos dvi 9 cm ir 5 cm ilgio pasvirosios. Pasvirųjų projekcijų plokštumoje ilgių suma lygi 8 cm. Apskaičiuokite pasvirųjų projekcijų ilgius.

63. Iš taško, esančio šalia plokštumos, nubrėžtos dvi pasvirosios, kurių ilgių suma lygi 28 mm. Šių pasvirųjų projekcijų plokštumoje ilgiai yra 6 mm ir 8 mm. Apskaičiuokite pasvirųjų ilgius.

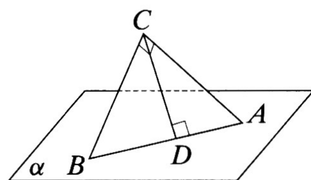
64. Iš taško O į plokštumą nubrėžtos dvi pasvirosios OM ir ON, kurios su plokštuma sudaro 45° ir 30° kampus. Kampo tarp pasvirųjų projekcijų didumas lygus 150°. Atstumas tarp pasvirųjų galų yra $4\sqrt{7}$ m. Apskaičiuokite atstumą nuo taško O iki plokštumos.

65. Iš taško M į plokštumą nubrėžtos dvi pasvirosios MN ir MK, kurios su plokštuma sudaro 30° ir 60° kampus. Kampo tarp pasvirųjų projekcijų didumas lygus 120°. Atstumas tarp pasvirųjų galų yra $\sqrt{13}$ cm. Apskaičiuokite pasvirųjų ilgius.

66. Iš taško į plokštumą nubrėžtos dvi pasvirosios, kurių ilgių santykis yra $1 : 2$. Pasvirųjų projekcijų plokštumoje ilgiai yra 2 cm ir 14 cm. Apskaičiuokite:
a) pasvirųjų ilgius;
b) atstumą nuo taško iki plokštumos.

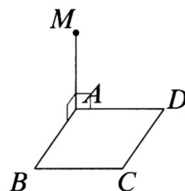
67. Iš taško į plokštumą nubrėžtos tarpusavyje statmenos, 10 cm ir 6 cm ilgio pasvirosios. Jų projekcijų plokštumoje ilgiai atitinkamai yra $5\sqrt{2}$ cm ir $3\sqrt{3}$ cm. Apskaičiuokite:
a) didumus kampų, kuriuos pasvirosios sudaro su plokštuma;
b) atstumą tarp pasvirųjų galų.

68. Iš taško C į plokštumoje esančią tiesę AB nubrėžtas statmuo CD ir pasvirosios CB ir CA, kurios sudaro statųjį kampą. Pasvirosios AC ilgis yra 12 cm, o jos projekcijos plokštumoje ilgis yra 6 cm. Apskaičiuokite:
a) atstumą nuo taško C iki atkarpos AB;
b) atkarpos AB ilgį;
c) pasvirosios CB ir jos projekcijos ilgius.

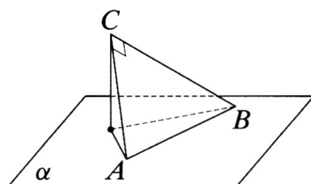


69. Trikampio kraštinių ilgiai yra 25 cm, 39 cm ir 56 cm. Erdvės taškas M nuo kiekvienos trikampio kraštinės nutolęs 25 cm atstumu. Koks atstumas nuo šio taško iki trikampio plokštumos?

70. Rombo $ABCD$ įstrižainių ilgiai yra 30 cm ir 40 cm. Bukojo kampo BAD viršūnė yra statmens rombo plokštumai pagrindas. Apskaičiuokite atkarpų MB, MD ir MC ilgius, jei $AM = 7$ cm.



71. Per stačiojo trikampio ABC įžambinę AB, kurios ilgis yra 16 cm, išvesta plokštuma α. Atstumas nuo trikampio viršūnės C iki plokštumos α lygus 6 cm. Statinio AC ilgis yra 8 cm.
Apskaičiuokite:
a) statinio BC ilgį;
b) atstumą nuo taško C iki kraštinės AB;
c) kampo tarp trikampio plokštumos ir plokštumos α didumą.



72. Stačiojo trikampio ABC statinių ilgiai yra 6 ir $6\sqrt{3}$. Per įžambinę AB išvesta plokštuma α, kuri su trikampio plokštuma sudaro 60° kampą. Apskaičiuokite:
a) įžambinės ilgį;
b) atstumą nuo taško C iki įžambinės AB;
c) atstumą nuo taško C iki plokštumos α.

73. Duotos dvi lygiagrečios plokštumos α ir β bei dvi tiesės a ir b ($a \subset \alpha$, $b \subset \beta$). Ar gali tiesės a ir b būti:
a) lygiagrečios; b) susikertančios; c) prasilenkiančios?

74. Atstumas tarp lygiagrečių plokštumų α ir β lygus m. Taškas M yra plokštumoje α, o taškas N — plokštumoje β.
a) Kiek tiesių, nutolusių nuo taško M atstumu m, yra plokštumoje β?
b) Kiek tiesių, nutolusių nuo taško M atstumu MN ($MN > m$), yra plokštumoje β?

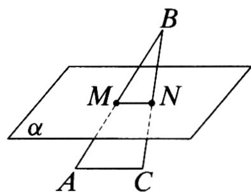
75. Taškai A ir B yra šalia plokštumos. Į šią plokštumą nuleisti statmenys AC ir BD. Apskaičiuokite atstumą tarp taškų A ir B, jei $AC = 15$ cm, $BD = 10$ cm, $CD = 12$ cm. (Du atvejai.)

76. Atkarpa MN, kurios ilgis yra 20 cm, kerta plokštumą α taške O. Atkarpos galai M ir N nuo plokštumos α nutolę atitinkamai 4 cm ir 6 cm atstumu. Raskite kampo tarp atkarpos MN ir plokštumos α didumą.

77. Atstumas tarp dviejų lygiagrečių plokštumų lygus 12 cm. Į šias plokštumas galais remiasi 13 cm ilgio atkarpa. Raskite atkarpos projekcijų kiekvienoje plokštumoje ilgius.

78. Atstumas tarp dviejų lygiagrečių plokštumų lygus 45 cm. Dviejų tiesių atkarpų tarp šių plokštumų ilgiai atitinkamai lygūs 51 cm ir 53 cm. Raskite šių atkarpų projekcijų vienoje plokštumoje ilgių santykį.

79. Plokštuma α yra lygiagreti trikampio ABC kraštinei AC ir kerta trikampio kraštinę AB taške M, o kraštinę BC — taške N.
a) Įrodykite, kad $MN \parallel AC$.
b) Įrodykite, kad $\triangle ABC \backsim \triangle MBN$.
c) Apskaičiuokite atkarpos MN ilgį, jei $BM = 15$ cm ir $AB : AC = 4 : 3$.



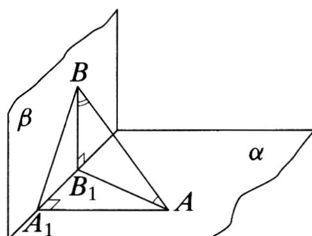
80. Dviejų tiesių atkarpų tarp lygiagrečių plokštumų ilgiai yra 5,3 dm ir 5,1 dm. Jų projekcijų vienoje plokštumoje ilgių santykis yra 7 : 6. Apskaičiuokite atstumą tarp plokštumų.

81. Tarp dviejų lygiagrečių plokštumų α ir β yra taškas K, kuriame susikerta tiesės a ir b. Tiesė a kerta plokštumą α taške A_1, o plokštumą β — taške A_2. Tiesė b kerta tas plokštumas atitinkamai taškuose B_1 ir B_2. Apskaičiuokite A_2K ir B_2K, jei $A_1A_2 = 2A_1K = 10$ cm, $B_1K = 40$ cm.

82. Per tašką O nubrėžtos dvi tiesės, kertančios lygiagrečias plokštumas α ir β atitinkamai taškuose A_1, B_1 ir A_2, B_2. Taškas O dalija atkarpą A_2B_2 santykiu 7 : 2, imant nuo taško A_2. Apskaičiuokite atkarpų A_1O ir A_2O ilgius, jei $A_1B_1 = 36$ dm, $A_2B_2 = 45$ dm.

83. Dviejų stačiųjų lygiašonių trikampių plokštumos yra tarpusavyje statmenos, o jų įžambinė bendra ir jos ilgis yra 21 cm. Apskaičiuokite atstumą tarp stačiųjų kampų viršūnių.

84. Atkarpos AB ilgis yra 10 cm. Jos galai priklauso tarpusavyje statmenoms plokštumoms α ir β ($A \in \alpha$, $B \in \beta$). Žinoma, kad kampas tarp atkarpos AB ir plokštumos α lygus 30°, o kampas tarp atkarpos AB ir plokštumos β — 60°. Raskite atstumus nuo taškų A ir B iki plokštumų susikirtimo linijos.



85. Dvi plokštumos susikerta kampu φ. Vienos plokštumos taškas A nutolęs nuo kitos plokštumos atstumu a. Raskite atstumą nuo taško A iki plokštumų susikirtimo tiesės, kai:
a) $\varphi = 30°$; b) $\varphi = 60°$.

86. Plokštumos α ir β yra lygiagrečios. Tarp šių plokštumų nubrėžtos atkarpos $AB = 15$ cm ir $CD = 13$ cm. Taškai A ir C yra plokštumoje α. Atkarpų AB ir CD projekcijų į vieną šių plokštumų ilgių suma lygi 14 cm. Raskite šių projekcijų ilgius ir atstumą tarp plokštumų.

87. Kurie iš taškų $A(2; 0; 3)$, $B(0; 4; 1)$, $C(5; 2; 0)$, $D(1; 0; 0)$ ir $E(0; 0; -3)$ yra:
a) plokštumoje xOz; b) ašyje Ox; c) ašyje Oz; d) plokštumoje yOz?

88. Kurie iš taškų $A(2; 4; 6)$, $B(0; 1; 3)$, $C(0; 0; 5)$ ir $D(4; 3; 0)$ yra:
a) ašyje Oz; b) plokštumoje yOz; c) plokštumoje xOy?

89. Kubo $OABCO_1A_1B_1C_1$ keturių viršūnių koordinatės yra $O(0; 0; 0)$, $A(0; 0; 4)$, $C(4; 0; 0)$ ir $O_1(0; 4; 0)$. Raskite kitų kubo viršūnių koordinates.

90. Iš taškų $A(2; 3; 5)$, $B(4; -1; 4)$, $C(2; -3; -5)$ ir $D(-6; 0; 4)$ į koordinačių ašis išvesti statmenys. Raskite šių statmenų pagrindų koordinates.

91. Iš taškų $M(1; 2; 3)$, $N(2; -3; -5)$, $K(4; -9; 0)$ ir $L(0; 7; -3)$ į koordinačių plokštumas išvesti statmenys. Raskite šių statmenų pagrindų koordinates.

92. Raskite koordinates taškų, simetriškų taškui $A(1; 2; 3)$ koordinatinių plokštumų atžvilgiu.

93. Įrodykite, kad keturkampis $ABCD$, kurio viršūnių koordinatės yra $A(-0{,}5; -1{,}5; -1)$, $B(0; -1; -2)$, $C(-0{,}5; -0{,}5; -2)$ ir $D(-1; -1; -1)$, yra lygiagretainis.

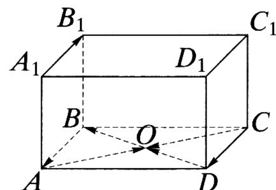
94. Taškas N yra koordinačių ašyje Ox ir vienodai nutolęs nuo taškų $A(3; 0; -2)$ ir $B(1; -3; 0)$. Apskaičiuokite taško N koordinates.

95. Raskite tokį tašką $M(x; y; 0)$, kuris būtų plokštumoje xOy ir būtų vienodai nutolęs nuo taškų $A(0; -2; 1)$, $B(0; 0; -1)$ ir $C(-1; 2; 0)$.

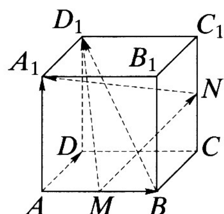
96. Raskite taškams $A(-3; 2; 5)$, $B(2; -1; 4)$, $C(3; 0; 6)$, $D(0; 5; -1)$ ir $E(4; -3; -1)$ simetriškų taškų koordinates:
a) koordinačių pradžios taško atžvilgiu;
b) Ox, Oy ir Oz ašių atžvilgiu;
c) xOy, yOz ir xOz plokštumų atžvilgiu.

5.2. ERDVĖS VEKTORIAI

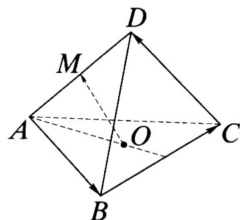
97. Stačiakampio gretasienio $ABCDA_1B_1C_1D_1$ briaunose ir pagrindo įstrižainėse, kurios susikerta taške O, pavaizduoti vektoriai.
Užrašykite:
a) priešinguosius vektorius;
b) lygius vektorius.



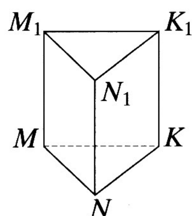
98. Kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kraštinėse AB ir CC_1 pažymėti vidurio taškai M ir N. Išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$ vektorius $\overrightarrow{BD_1}$, $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{MD_1}$ ir $\overrightarrow{NA_1}$.



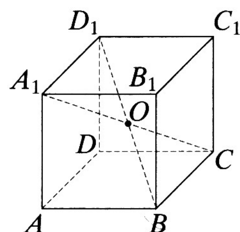
99. Visos piramidės $ABCD$ sienos — taisyklingieji trikampiai. Taškas O yra trikampio ABC centras, o taškas M dalija briauną AD pusiau. Vektorių $\overrightarrow{OM}$ išreikškite vektoriais $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ir $\overrightarrow{CD}$.



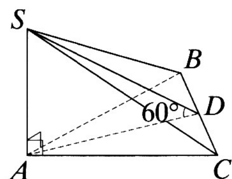
100. Duota trikampė prizmė. Nurodykite vektorių x, kurio pradžia ir pabaiga būtų prizmės viršūnėse ir:
a) $\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{N_1K} - \vec{x} = \overrightarrow{NM}$;
b) $\overrightarrow{MK_1} - \overrightarrow{NN_1} + \vec{x} = \overrightarrow{MN}$.



101. Kubo įstrižainės susikerta taške O. Raskite tokį skaičių k, su kuriuo būtų teisinga lygybė:
a) $\overrightarrow{CC_1} = k \cdot \overrightarrow{AA_1}$; b) $\overrightarrow{CD} = k \cdot \overrightarrow{A_1B_1}$;
c) $\overrightarrow{A_1C} = k \cdot \overrightarrow{CO}$; d) $\overrightarrow{OD_1} = k \cdot \overrightarrow{BD_1}$.



102. Piramidės $SABC$ briauna SA yra statmena pagrindo ABC plokštumai. Piramidės pagrindas yra lygiakraštis trikampis, kurio kraštinė lygi a. Sienos SBC aukštinė SD su pagrindo plokštuma sudaro $60°$ kampą. Apskaičiuokite $|\overrightarrow{DS} - \overrightarrow{DA}|$.



103. $SABCDEF$ — taisyklingoji šešiakampė piramidė, SO — jos aukštinė. Įrodykite, kad $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SE} + \overrightarrow{SF})$.

104. Taisyklingosios trikampės piramidės $SABC$ pagrindo ABC kraštinės ilgis yra 9 cm, o šoninės briaunos pasvirusios į pagrindo plokštumą 30° kampu. Iš viršūnės S į pagrindą nuleistas statmuo SO. Apskaičiuokite $|\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CS}|$.

105. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — kubas. Apskaičiuokite kampą tarp vektorių $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{BD}$.

106. Vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ sudaro 60° kampą. Apskaičiuokite $|\vec{a} - \vec{b}|$ ir $|\vec{a} + \vec{b}|$, jei $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$.

107. Raskite vektoriaus $\vec{p}$ ilgį, kai $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{6}$.

108. Duoti vektoriai $\vec{a}(-2; 0; 3)$ ir $\vec{b}(0; -4; 1)$. Raskite koordinates vektoriaus:
a) $\vec{a} + \vec{b}$; b) $\vec{a} - \vec{b}$; c) $-2\vec{a}$; d) $\frac{1}{3}\vec{b}$.

109. Duoti vektoriai $\vec{a}(3; -\frac{1}{2}; -4)$ ir $\vec{b}(2; 0; -1)$. Raskite koordinates vektoriaus:
a) $2\vec{a} - \vec{b}$; b) $-4a + \frac{1}{2}\vec{b}$; c) $-\vec{a} + 2\vec{b}$; d) $\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

110. Duoti vektoriai $\vec{a}(3; 2; 1)$, $\vec{b}(-5; -4; -3)$ ir $\vec{c}(2; -6; 8)$. Raskite koordinates vektoriaus:
a) $\vec{a} + \vec{b}$; b) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; c) $2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$; d) $-\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b} - \frac{1}{10}\vec{c}$.

111. Raskite vektoriaus $\vec{p} = -\vec{a} + 2\vec{c} - 3\vec{b}$ koordinates, kai:
a) $\vec{a}(3; 5; 0)$, $\vec{b}(6; 0; -4)$, $\vec{c}(0; -7; 1)$;
b) $\vec{a}(0{,}4; -0{,}2; 0{,}1)$, $\vec{b}(-0{,}3; 0{,}4; 0{,}7)$, $\vec{c}(1{,}2; -3{,}1; -2{,}5)$;
c) $\vec{a}\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{7}; -\frac{2}{5}\right)$, $\vec{b}\left(\frac{1}{4}; -\frac{5}{7}; -\frac{3}{5}\right)$, $\vec{c}\left(-\frac{3}{4}; \frac{4}{7}; \frac{4}{5}\right)$.

112. Taškas C yra atkarpos AB vidurio taškas. Raskite:
a) taško C koordinates, kai $A(2; 5; -10)$ ir $B(-3; 0; -7)$;
b) taško A koordinates, kai $B(1{,}5; -3; 2{,}5)$ ir $C(0; 1; -4)$.

113. Apskaičiuokite atstumą nuo koordinačių pradžios taško O, iki atkarpos AB vidurio taško, kai:
a) $A(-1; 3; 1)$, $B(2; -1; 3)$;
b) $A(4; 2; -2)$, $B(-4; 2; 2)$;
c) $A(0; -1; 2)$, $B(-4; 7; 0)$;
d) $A(2{,}4; -3{,}2; 0)$, $B(5; 0; 4)$.

114. Apskaičiuokite atstumą nuo taško M iki atkarpos AB vidurio taško, kai:
a) $A(-0{,}5; 1; 1{,}5)$, $B(1{,}5; -1; 0{,}5)$ ir $M(0; 0; 1)$;
b) $A\left(\frac{1}{3}; -1; \frac{2}{3}\right)$, $B\left(-1; 1; -\frac{4}{3}\right)$ ir $M(1; -1; 1)$.

115. Atkarpos AB vidurio taškas M yra Ox ašyje. Raskite m ir n, kai:
a) $A(-2; m; 4)$, $B(1; 3; n)$; b) $A(0; m; n+2)$, $B(1; -n; 1+m)$.

116. Atkarpos AB vidurio taškas M yra Oy ašyje. Raskite m ir n, kai:
a) $A(5; 3; -7)$, $B(m; 4; n)$; b) $A(3m; -1; 6)$, $B(6; 0; -3n)$.

117. Atkarpos AB vidurio taškas M yra Oz ašyje. Raskite m ir n, kai:
a) $A(m; 7; 11)$, $B(4; -n; 12)$; b) $A\left(\frac{1}{5}n; \frac{1}{6}m; 0\right)$, $B(-10; 12; 3)$.

118. Ar kolinearūs vektoriai:
a) $\vec{a}(2; -4; 3)$ ir $\vec{b}(1; -2; 1{,}5)$;
b) $\vec{a}(-2; -1; -4)$ ir $\vec{b}(-4; -2; 8)$;
c) $\vec{a}(0; 0; 6)$ ir $\vec{b}(0; 0; -6)$;
d) $\vec{a}(0{,}5; 0{,}6; 0{,}7)$ ir $\vec{b}(0{,}25; 0{,}3; 0{,}35)$?

119. Raskite tokius skaičius m ir n, su kuriais vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ būtų kolinearūs, kai:

a) $\vec{a}(2; 6; m)$ ir $\vec{b}(n; 3; 4)$; b) $\vec{a}(-8; n; 10)$ ir $\vec{b}(m; 0{,}5; 20)$;

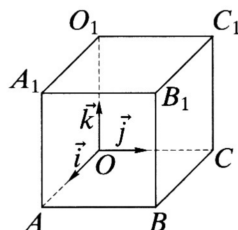
c) $\vec{a}\left(m; \frac{1}{3}; -\frac{2}{5}\right)$ ir $\vec{b}(-1; 3; n)$; d) $\vec{a}(4; m; n)$ ir $\vec{b}\left(n; 2; m^2\right)$.

120. Su kuria m reikšme vektoriai $\vec{a}(4; 6; m)$ ir $\vec{b}(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}; 3)$ yra kolinearūs?

121. Stačiakampio gretasienio $ABCDOA_1B_1C_1D_1O_1$ briaunos $OA = 5$, $OC = \sqrt{3}$, $OO_1 = 8$.

a) Išreikškite vektorius $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$, $\overrightarrow{OC_1}$ ir $\overrightarrow{OO_1}$ koordinatiniais vektoriais.

b) Raskite vektorių $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB_1}$ ir $\overrightarrow{OO_1}$ koordinates.



122. Duoti vektoriai $\vec{a}(2; -3; 1)$ ir $\vec{b}(-2; 3; -1)$. Raskite:

a) $|\vec{a} + \vec{b}|$; b) $|\vec{a}| + |\vec{b}|$; c) $|\vec{a} - \vec{b}|$; d) $|\vec{a}| - |\vec{b}|$.

123. Raskite vektoriaus $\overrightarrow{AB}$ ilgį, kai:

a) $A(1; -2; 3)$ ir $B(-1; 0; 2)$;

b) $A(5; -\sqrt{2}; 1)$ ir $B(-2; \sqrt{2}; 0)$;

c) $A(11; -\sqrt{2}; 1)$ ir $B(2; 0; 4)$.

124. Su kuria m reikšme vektorių $\vec{p}(2m; 2; 3)$ ir $\vec{q}(-6; -2; m)$ ilgiai yra lygūs?

125. Su kuria m reikšme vektorius $\vec{p}(6\sqrt{7}; 0; 3m)$ dvigubai ilgesnis už vektorių $\vec{q}(-2; 4m; 2)$?

126. Su kuriomis x reikšmėmis vektoriai $\vec{m}(2x; 3; 4)$ ir $\vec{n}(-8; -3; x)$ yra vienodo ilgio?

127. Nustatykite trikampio ABC rūšį pagal kraštines, kai:

a) $A\left(3; 1; -1\frac{2}{3}\right)$, $B\left(1; 5; -2\frac{1}{2}\right)$, $C\left(1; 1\frac{1}{2}; 1\right)$;

b) $A(5; -3; 2)$, $B(1; 3; -10)$, $C(3; 7; -4)$.

128. Apskaičiuokite trikampio ABC pusiaukraštinių AM, BN ir CK ilgius, kai trikampio viršūnės yra:

a) $A(-1; 4; 2)$, $B(5; 2; 0)$, $C(3; 0; 1)$; b) $A(1; 3; -1)$, $B(3; -4; 2)$, $C(1; 3; -1)$.

129. Raskite koordinates taško, priklausančio Oz ašiai ir vienodai nutolusio nuo taškų $A(2; 3; -1)$ ir $B(0; -1; 2)$.

130. Raskite koordinates taško, priklausančio Oy ašiai ir vienodai nutolusio nuo taškų $M(1; -0{,}5; 0{,}5)$ ir $N(0; 0{,}5; 4)$.

131. Įrodykite, kad taškai $A(2; 4; -4)$, $B(1; 1; -3)$, $C(-2; 0; 5)$ ir $D(-1; 3; 4)$ yra lygiagretainio viršūnės.

132. Įrodykite, kad taškai $A(-3; 1; -2)$, $B(-1; -2; 1)$, $C(1; -1; 3)$ ir $D(-3; 5; -3)$ yra trapecijos viršūnės.

133. Įrodykite, kad taškai $A(1; -2; 2)$, $B(6; 3; 2)$, $C(9; 7; 7)$ ir $D(4; 2; 7)$ yra rombo viršūnės.

134. Vektorius $\vec{a}$ kolinearus vektoriui $\vec{b}(3; -4; -\frac{15}{4})$ ir su Oz ašimi sudaro smailų kampą. Raskite vektoriaus $\vec{a}$ koordinates, jei $|\vec{a}| = 25$.

135. Žinoma, kad vektoriaus $\vec{m}$ ilgis yra 4, o vektoriaus $\vec{n}$ ilgis yra $3\sqrt{2}$. Apskaičiuokite skaliarinę sandaugą $(\vec{m}-\vec{n})\cdot(2\vec{m}+\vec{n})$, kai kampo tarp vektorių $\vec{m}$ ir $\vec{n}$ didumas yra: a) $45°$; b) $30°$; c) $120°$; d) $180°$.

136. Apskaičiuokite vektorių $\vec{m}(-1; 2; 3)$ ir $\vec{n}(3; -2; 1)$ skaliarinę sandaugą.

137. Duoti vektoriai $\vec{m}(-1; 2; 3)$ ir $\vec{n}(5; x; -4)$. Su kuria x reikšme: a) $\vec{m}\cdot\vec{n}=0$; b) $\vec{m}\cdot\vec{n}=-1$; c) $\vec{m}\cdot\vec{n}=\sqrt{3}$?

138. Kampo tarp vektorių $\vec{p}$ ir $\vec{q}$ didumas yra $45°$. Apskaičiuokite vektorių $\vec{p}$ ir $\vec{q}$ skaliarinę sandaugą, jei $\vec{p}(1; -1; 4)$ ir $|\vec{q}|=3$.

139. Su kuria m reikšme vektoriai $\vec{a}(4; m; -6)$ ir $\vec{b}(2; -4; 2)$ yra tarpusavyje statmeni?

140. Apskaičiuokite $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot\vec{a}$, jei $\vec{a}(6; -2; 1)$ ir $\vec{b}(-3; 1; 4)$.

141. Apskaičiuokite kampo tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ didumą, kai: a) $\vec{a}(2; -2; 0)$ ir $\vec{b}(3; 0; -3)$; b) $\vec{a}(-3; 4; -5)$ ir $\vec{b}(-4; -5; 3)$.

142. Raskite kampo tarp vektorių $2\vec{a}$ ir $\frac{1}{2}\vec{b}$ didumą, kai $\vec{a}(-4; 2; 4)$ ir $\vec{b}(\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0)$.

143. Raskite kosinusą kampo tarp vektorių $-3\vec{a}$ ir $\frac{1}{3}\vec{b}$, kai $\vec{a}(6; -3; 6)$ ir $\vec{b}(4; -2; 5)$.

144. Apskaičiuokite kampo tarp vektorių $\vec{a}+\vec{b}$ ir $\vec{c}$ didumą, kai $\vec{a}(1; 0; 1)$, $\vec{b}(3; -1; 0)$ ir $\vec{c}(1; 1; 1)$.

145. Raskite kosinusą kampo tarp vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{CD}$, kai:
a) $A(-6; 3; 0)$, $B(0; 6; -6)$, $C(2; 2; -2)$, $D(1; 4; -4)$;
b) $A(\sqrt{2}; 1; 2)$, $B(0; 1; 2)$, $C(0; 2; 1)$, $D(\sqrt{2}; 2; 1)$.

146. Kokią sąlygą turi tenkinti vektoriai $\vec{a}$ ir $\vec{b}$, kad vektoriai $\vec{a}+\vec{b}$ ir $\vec{a}-\vec{b}$ būtų statmeni?

147. Raskite tokį x, su kuriuo vektoriai $\vec{a}(x; -1; 2)$ ir $\vec{b}(-3; x; 4)$ būtų statmeni.

148. Apskaičiuokite vektoriaus $\vec{b}$ koordinates, jei žinoma, kad jis kolinearus vektoriui $\vec{a}(2; 1; -1)$ ir $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$.

149. Duoti vektoriai $\vec{a}(1{,}5; -1; 1{,}5)$ ir $\vec{b}(0{,}5; 1; 0{,}5)$. Raskite vektoriaus $\vec{c}$ koordinates, jei $\vec{a}\cdot\vec{c}=2$ ir $\vec{c}\parallel\vec{b}$.

150. Raskite reiškinio $\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})-(\vec{a}-\vec{b})^2$ reikšmę, jei $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $\widehat{(\vec{a},\vec{b})}=60°$.

151. Raskite vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ skaliarinę sandaugą ir kampo tarp šių vektorių kosinusą, jei: a) $\vec{a}(2; 6; -3)$, $\vec{b}(-3; 0; 4)$; b) $\vec{a}(0; -2; -6)$, $\vec{b}(6; 3; -5)$.

152. Raskite kampą tarp vektorių $\vec{a}+\vec{b}$ ir $\vec{a}-\vec{b}$, jei $\vec{a}(1; -1; 0)$ ir $\vec{b}(1; 0; -1)$.

153. Raskite kampą tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ ir apskaičiuokite vektorių $3\vec{a}+2\vec{b}$ ir $\vec{b}$ skaliarinę sandaugą, kai $\vec{a}(0; -1; 1)$ ir $\vec{b}(\sqrt{2}; 0; -\sqrt{2})$.

154. Apskaičiuokite vektorių $\vec{m}$ ir $\vec{n}$ skaliarinę sandaugą, jei $\vec{m}=\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{n}=\vec{a}+\vec{b}$, $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\widehat{(\vec{a},\vec{b})}=60°$.

155. Raskite kosinusus kampų, kuriuos vektorius $\vec{a}(5; -\sqrt{2}; 3)$ sudaro su koordinatiniais vektoriais $\vec{i}$, $\vec{j}$ ir $\vec{k}$.

156. Su kuriomis m reikšmėmis kampo tarp vektorių $\vec{a}(0; m; -2)$ ir $\vec{b}(-1; 0; -1)$ didumas lygus $60°$?

157. Duoti vektoriai $\vec{a}(1; -5; 2)$, $\vec{b}(1; \frac{1}{2}; \frac{3}{4})$, $\vec{c}(1; 5; 1)$ ir $\vec{d}(0; 0; 1)$. Apskaičiuokite jų skaliarines sandaugas poromis ir nurodykite, kokį jie sudaro kampą: smailųjį, statųjį ar bukąjį.

158. Apskaičiuokite trikampio ABC kampų kosinusus, kai:
a) $A(1; 1; 1)$, $B(2; 1; -1)$ ir $C(-3; 0; 2)$; b) $A(0; 0; 0)$, $B(2; -1; 1)$ ir $C(3; 0; -4)$.

159. Apskaičiuokite trikampio ABC kampų didumus, kai jo viršūnės yra $A(-1; 0; 4)$, $B(0; 1; 0)$ ir $C(1; -1; 2)$.

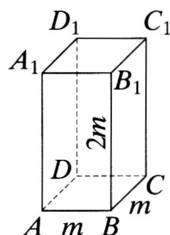
160. Įrodykite, kad trikampis, kurio viršūnės yra $M(3; 2; 3)$, $N(6; -4; 2)$ ir $K(3; -5; -1)$, yra statusis. Apskaičiuokite šio trikampio perimetrą ir plotą.

161. Raskite trikampio priekampių didumus, kai trikampio viršūnės yra:
a) $A(1; 1; -3)$, $B(-3; 1; -1)$ ir $C(1; -1; -3)$;
b) $A(-5; 2; 0)$, $B(-4; 3; 0)$ ir $C(-5; 2; -2)$.

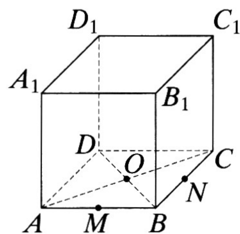
162. Įrodykite, kad duotieji taškai yra lygiagretainio viršūnės ir apskaičiuokite smailiojo kampo tarp lygiagretainio įstrižainių didumą, kai:
a) $A(3; 0; 5)$, $B(-1; 0; 3)$, $C(5; 0; -1)$, $D(9; 0; 1)$;
b) $A(4; 8; -8)$, $B(2; 2; -6)$, $C(-4; 0; 10)$, $D(-2; 6; 8)$.

163. Taškai $A(1,5; -0,5; 1)$, $B(0,5; 1; -0,5)$, $C(-0,5; 0,5; -1,5)$ ir $D(1,5; -2,5; 1,5)$ yra keturkampio viršūnių koordinatės. Įrodykite, kad šis keturkampis yra trapecija. Apskaičiuokite trapecijos perimetrą.

164. Brėžinyje pavaizduotas stačiakampis gretasienis, kurio $AB = BC = m$, $BB_1 = 2m$.
Kokį kampą sudaro:
a) vektoriai $\overrightarrow{CD}$ ir $\overrightarrow{CD_1}$;
b) tiesės AC ir AC_1;
c) vektoriai $\overrightarrow{D_1C}$ ir $\overrightarrow{A_1B_1}$.



165. Kubo pagrindo įstrižainės AC ir BD susikerta taške O. Taškai M ir N — atitinkamai kraštinių AB ir BC vidurio taškai.
Kokį kampą sudaro:
a) vektoriai $\overrightarrow{MN}$ ir $\overrightarrow{OC_1}$;
b) tiesės MN ir OA_1;
c) vektoriai $\overrightarrow{AC}$ ir $\overrightarrow{OC_1}$?



166. Duoti vektoriai $\vec{m}(1; 2; -3)$ ir $\vec{n}(3; -1; 5)$. Raskite vektoriaus $\vec{a}$ koordinates, jei šis vektorius yra plokštumoje xOy ir tenkina sąlygas: $\vec{a} \cdot \vec{m} = -4$, $\vec{a} \cdot \vec{n} = 9$.

167. Duoti vektoriai $\vec{a}(1; -1; 0)$, $\vec{b}(-1; -2; 1)$, $\vec{c}(2; 3; 1)$ ir $\vec{d}(2; 1; -1)$. Vektoriaus $\vec{v}$ koordinatės nežinomos, tačiau žinoma, kad $\vec{v} \cdot \vec{b} = 4$, $\vec{v} \cdot \vec{c} = 6$ ir $\vec{v} \cdot \vec{d} = 2$. Įrodykite, kad kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{v}$ lygus $\frac{\pi}{4}$.

5.3. BRIAUNAINIAI

168. Stačiosios prizmės pagrindas — statusis trikampis, kurio statinių ilgiai yra 1,5 m ir 2 m. Prizmės aukštinės ilgis lygus 3 m. Apskaičiuokite prizmės viso paviršiaus plotą ir tūrį.

169. Stačiosios prizmės pagrindas — lygiagretainis, kurio kraštinių ilgiai yra 3 cm ir 2 cm, o kampo tarp jų didumas lygus 60°. Didesniosios sienos įstrižainės ilgis yra 5 cm. Apskaičiuokite prizmės viso paviršiaus plotą ir tūrį.

170. Stačiosios prizmės pagrindas — rombas, kurio kraštinės ilgis yra 15 mm, o smailiojo kampo didumas lygus 60°. Ilgesnioji prizmės įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro 30° kampą. Apskaičiuokite prizmės įstrižainių ilgius.

171. Stačiosios prizmės pagrindas — lygiagretainis, kurio kraštinių ilgiai yra 8 cm ir 10 cm, o vienos pagrindo įstrižainės ilgis yra 6 cm. Mažesniojo įstrižojo pjūvio plotas lygus 36 cm^2. Apskaičiuokite prizmės viso paviršiaus plotą ir tūrį.

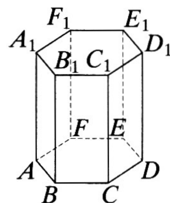
172. Taisyklingosios keturkampės prizmės viso paviršiaus plotas lygus 440 cm^2, o aukštinė 4 cm trumpesnė už pagrindo kraštinę. Raskite prizmės pagrindo kraštinės ilgį.

173. Stačiosios prizmės pagrindas yra statusis trikampis, kurio statinių ilgiai yra 7 cm ir 24 cm. Apskaičiuokite prizmės tūrį, jeigu jos tūris ir paviršiaus plotas išreikšti tuo pačiu skaičiumi.

174. Taisyklingosios šešiakampės prizmės pagrindo kraštinės ilgis yra 2, o šoninio paviršiaus plotas lygus $6\sqrt{3}$. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

175. Taisyklingosios šešiakampės prizmės pagrindo kraštinės ilgis yra 3 cm, o aukštinės ilgis yra 4 cm. Apskaičiuokite prizmės:

a) pagrindo įstrižainės AD ilgį; b) pjūvio ADD_1A_1 plotą;
c) pagrindo įstrižainės AC ilgį; d) pjūvio ACC_1A_1 plotą;
e) pagrindo plotą.



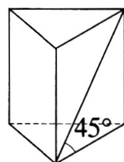
176. Pasvirosios prizmės šoninės briaunos ilgis yra $24\sqrt{3}$ cm. Ši briauna pasvirusi į pagrindo plokštumą 30° kampu. Prizmės pagrindas — lygiakraštis trikampis, kurio kraštinės ilgis yra 5 cm. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

177. Atstumai tarp pasvirosios trikampės prizmės šoninių briaunų yra 37 cm, 13 cm ir 40 cm. Apskaičiuokite atstumą tarp didžiosios šoninės sienos ir prieš ją esančios briaunos.

178. Pasvirosios prizmės pagrindas — lygiašonis trikampis ABC; $AB = BC = 10$ cm, $AC = 12$ cm. Viršūnė B_1 vienodai nutolusi nuo viršūnių A, B ir C. Briaunos BB_1 ilgis yra 13 cm. Apskaičiuokite prizmės viso paviršiaus plotą.

179. Taisyklingosios trikampės prizmės pagrindo plotas lygus $64\sqrt{3}$ cm^2. Šoninės sienos įstrižainė su pagrindo kraštine sudaro 45° kampą. Apskaičiuokite prizmės:

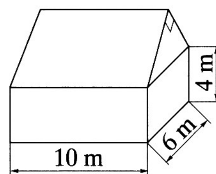
a) pagrindo kraštinės ilgį; b) aukštinę;
c) šoninio paviršiaus plotą; d) tūrį.



180. Taisyklingosios trikampės prizmės šoninės sienos įstrižainės ilgis yra $2\sqrt{3}$. Ši įstrižainė pasvirusi į pagrindo plokštumą 30° kampu. Apskaičiuokite prizmės viso paviršiaus plotą ir tūrį.

181. Ūkio padargams sudėti buvo pastatyta pašiūrė, kurios skerspjūvis — lygiašonė trapecija. Apatinio trapecijos pagrindo ilgis yra 5 m, o viršutinio — 40% trumpesnis. Pašiūrės ilgis yra 8 m. Jos sienas ir lubas norima iškloti izoliacine medžiaga. Kokį plotą reikės iškloti?

182. 10 m ilgio, 6 m pločio ir 4 m aukščio klojimas uždengtas dvišlaičiu stogu, tarp kurio gegnių yra statusis kampas. Abu stogo šlaitai pasvirę vienodu kampu. Kiek kubinių metrų šieno telpa į šį klojimą?



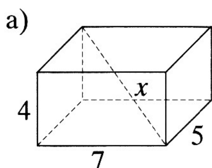
183. Suvenyrams įpakuoti buvo gaminamos atviros keturkampės prizmės formos dėžutės, kurių pagrindas 15 cm × 20 cm, o aukštis — 10 cm. Kiek tokių dėžučių galima pagaminti iš vieno spalvoto popieriaus lapo, kurio matmenys yra 150 cm × 100 cm? Atliekoms pridėkite 6% visoms dėžutėms reikalingo popieriaus.

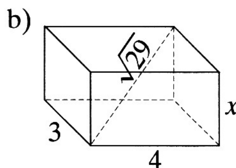
184. Kubo tūris lygus $27\,\text{m}^3$. Apskaičiuokite kubo:
a) viso paviršiaus plotą; b) įstrižainių ilgius.

185. Kubo viso paviršiaus plotas lygus $216\,\text{cm}^3$. Apskaičiuokite kubo:
a) tūrį; b) įstrižainių ilgius.

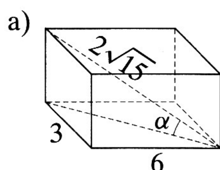
186. Per dvi priešingas kubo briaunas išvestas pjūvis, kurio plotas lygus $169\sqrt{2}\,\text{cm}^2$. Apskaičiuokite kubo:
a) briaunos ilgį; b) įstrižainės ilgį; c) paviršiaus plotą; d) tūrį.

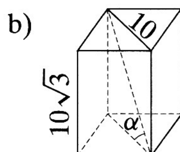
187. Brėžinyje pavaizduotas stačiakampis gretasienis. Apskaičiuokite x:

a)


b)


188. Brėžinyje pavaizduotas stačiakampis gretasienis. Apskaičiuokite kampo α didumą:

a)


b)


189. Stačiakampio gretasienio briaunų, išeinančių iš vienos viršūnės, ilgiai yra 20 cm, 30 cm ir 4 dm. Apskaičiuokite gretasienio įstrižainės ilgį.

190. Stačiakampio gretasienio pagrindo kraštinių ilgiai yra 1,4 cm ir 4,8 cm, o aukštinės ilgis yra 1,6 cm. Apskaičiuokite gretasienio įstrižaininio pjūvio plotą.

191. Akvariumas yra stačiakampio gretasienio formos, kurio matmenys yra 0,8 m, 0,7 m ir 0,45 m. Apskaičiuokite šio akvariumo savikainą, jei 1 m^2 stiklo kainuoja 16 litų, o pagaminimo išlaidos sudaro 75% akvariumo medžiagos kainos.

192. Varinis luitas yra stačiakampio gretasienio, kurio matmenys yra 60 cm $\times$ 20 cm $\times$ 5 cm formos. Iš šio luito valcuojamas 1 mm storio lakštas. Apskaičiuokite to lakšto plotą.

193. Stačiakampio gretasienio formos plytos matmenys yra 2,5 dm, 14 dm ir 6 cm. Plytos tankis lygus 1,8 g/cm^3. Apskaičiuokite plytos masę.

194. Plytos matmenys yra 25 cm $\times$ 10 cm $\times$ 6 cm. Sienoje yra 10 000 tokių plytų. Apskaičiuokite sienos tūrį, jei skiedinys tarp plytų sienos tūrį padidina 15%.

195. Stačiakampio gretasienio briaunų ilgiai sutinka kaip 3 : 5 : 8, o jo viso paviršiaus plotas lygus 632 cm^2. Apskaičiuokite gretasienio tūrį.

196. Stačiakampio gretasienio viso paviršiaus plotas lygus 352 cm^2. Raskite gretasienio briaunų ilgius, kai jų santykis yra 1 : 2 : 3.

197. Stačiakampio gretasienio viso paviršiaus plotas lygus 808 cm^2. Raskite gretasienio briaunų ilgius, jei jų santykis yra 3 : 7 : 8.

198. Iš 10 kg švino buvo nulietas kubas, kurio briaunos ilgis yra 9,6 cm. Apskaičiuokite švino tankį (dešimtųjų tikslumu).

199. Plyta, kurios matmenys yra 25 cm $\times$ 12 cm $\times$ 6,5 cm, sveria 3,51 kg. Apskaičiuokite tankį medžiagos, iš kurios pagaminta ši plyta.

200. Koks gali būti didžiausias stačiakampio gretasienio tūris, jei jo sienų plotai yra 3 dm^2, 4 dm^2 ir 9 dm^2?

201. Į sandėlį buvo atvežta 64 m^3 ledo. Kaip patogiau sudėti ledą, kad jis lėčiau tirptų (būtų mažesnis paviršius): kubo forma ar stačiakampio gretasienio, turinčio pagrindą 4 m $\times$ 8 m, forma?

202. Gretasienio trijų sienų plotai yra 10 m^2, 20 m^2 ir 30 m^2. Kam lygus gretasienio viso paviršiaus plotas?

203. Stačiakampio gretasienio aukštinės ilgis yra 60 mm, o šoninių sienų įstrižainių ilgiai yra 61 mm ir 100 mm. Apskaičiuokite gretasienio viso paviršiaus plotą ir tūrį.

204. Kubo įstrižaininio pjūvio plotas lygus S. Raskite kubo paviršiaus plotą.

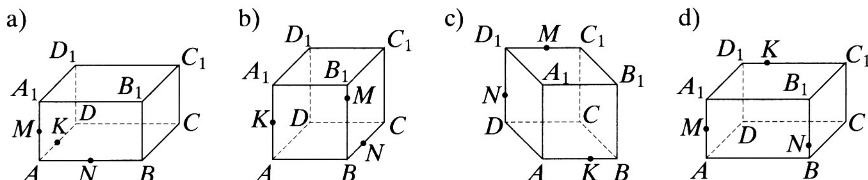
205. Apskaičiuokite stačiojo gretasienio, kurio visų briaunų ilgiai yra 1, o pagrindo kraštinių sudarytas kampas α, įstrižainių ilgius, kai:
a) $\alpha = 60^\circ$; b) $\alpha = 30^\circ$.

206. Iš gipso reikia pagaminti 0,33 kg sveriantį kubą. Apskaičiuokite šio kubo briaunos ilgį, jei gipso tankis yra 1,7 g/cm^3. Atsakymą išreikškite centimetrais.

207. Trys geležiniai kubai, kurių briaunų ilgiai yra 12 mm, 25 mm ir 30 mm, sulydyti į vieną kubą. Koks naujojo kubo briaunos ilgis? Kiek sveria šis kubas, jei geležies tankis yra 7,8 kg/dm^3? Atsakymą išreikškite gramais.

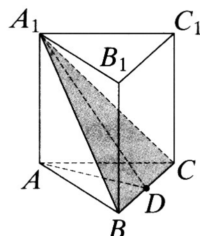
208. Taškai M ir N yra kubo $ABCDA_1B_1C_1D_1$ atitinkamai kraštinių A_1B_1 ir B_1C_1 vidurio taškai.
a) Nubraižykite pjūvį, einantį per atkarpą MN ir tašką A.
b) Kokia figūra yra gautasis pjūvis? Atsakymą pagrįskite.
c) Apskaičiuokite gautojo pjūvio kraštinių ilgius, kai kubo briaunos ilgis yra 10 cm.

209. Nubraižykite pjūvį gretasienio ir plokštumos, einančios per taškus M, N ir K:

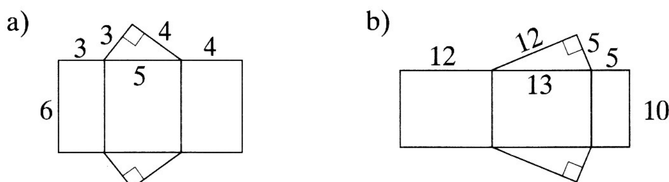


210. Per dvi priešingas kubo briaunas išvestas pjūvis, kurio plotas lygus $144\sqrt{2}$. Apskaičiuokite:
a) kubo briaunos ilgį;
b) kubo įstrižainės ilgį;
c) kubo viso paviršiaus plotą ir tūrį;
d) kampo tarp įstrižainės ir pagrindo plokštumos sinusą.

211. Taisyklingosios trikampės prizmės pagrindo kraštinės ilgis yra 12 cm, o aukštinės ilgis yra 10 cm. Taškas D — briaunos BC vidurio taškas. Apskaičiuokite:
a) AD ilgį;
b) A_1D ilgį;
c) pjūvio A_1BC plotą;
d) prizmės viso paviršiaus plotą ir tūrį.



212. Iš pavaizduotos išklotinės sulankstytas briaunainis:



1) Pavaizduokite tą briaunainį.
2) Apskaičiuokite jo viso paviršiaus plotą.
3) Apskaičiuokite jo tūrį.

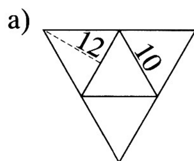
213. Taisyklingosios trikampės prizmės šoninė briauna lygi pagrindo aukštinei. Pjūvio, einančio per šią prizmės briauną ir pagrindo aukštinę, plotas lygus 243 cm^2. Apskaičiuokite prizmės tūrį.

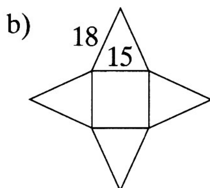
214. Stačiojo gretasienio pagrindas yra rombas, kurio įstrižainių ilgiai yra 10 ir 16. Gretasienio aukštinės ilgis yra $\sqrt{11}$. Per gretasienio šoninių sienų įstrižaines BC_1 ir DC_1 išvesta plokštuma. Apskaičiuokite gauto pjūvio BC_1D plotą.

215. Stačiakampio gretasienio pagrindas yra kvadratas. Per dvi šio gretasienio priešingas šonines briaunas nubraižyta jį kertanti plokštuma. Raskite gretasienio šoninio paviršiaus plotą, jei pjūvio plotas lygus S.

216. Prizmės pagrindas yra lygiašonė trapecija, kurios pagrindų ilgiai yra 44 cm ir 28 cm, o šoninės kraštinės ilgis yra 17 cm. Prizmės vienas įstrižinis pjūvis yra rombas, statmenas pagrindo plokštumai, o rombo kampo didumas lygus 45°. Raskite pjūvio plotą.

217. Brėžinyje pavaizduota taisyklingosios piramidės išklotinė. Kiek popieriaus sunaudojama piramidės gamybai? Matmenys pateikti centimetrais. Atsakymą suapvalinkite iki dešimčių.

a) 

b) 

218. Piramidės pagrindas yra lygiašonis trikampis, kurio kraštinių ilgiai yra 6 cm, 5 cm ir 5 cm. Visos piramidės šoninės briaunos su pagrindu sudaro 45° dvisienius kampus. Apskaičiuokite piramidės tūrį.

219. Jei taisyklingosios trikampės piramidės aukštinė lygi pagrindo kraštinei, tai piramidės šoninės briaunos pasvirusios į pagrindo plokštumą 60° kampu. Įrodykite.

220. Piramidės visos šoninės sienos pasvirusios į pagrindo plokštumą tuo pačiu kampu α. Įrodykite, kad:
a) šoninių sienų aukštinės, nuleistos iš piramidės viršūnės, yra lygios;
b) į piramidės pagrindą galima įbrėžti apskritimą;
c) piramidės pagrindo plotą S_{pagr} ir jos šoninio paviršiaus plotą $S_{\text{šon}}$ galima išreikšti formule $S_{\text{šon}} = \frac{S_{\text{pagr}}}{\cos\alpha}$.

221. Piramidės visos šoninės briaunos su pagrindo plokštuma sudaro kampus lygius φ. Įrodykite, kad:
a) piramidės šoninės briaunos lygios;
b) apie piramidės pagrindą galima apibrėžti apskritimą.

222. Taisyklingosios piramidės aukštinės ilgis yra $\sqrt{2}$, o pagrindo kraštinės ilgis yra 1. Apskaičiuokite piramidės viso paviršiaus plotą, jei piramidė yra:
a) trikampė; b) keturkampė; c) šešiakampė.

223. Taisyklingosios piramidės pagrindo kraštinės ilgis yra a, o aukštinės ilgis yra h. Apskaičiuokite piramidės apotemos ilgį, jei piramidė yra:
a) trikampė; b) keturkampė; c) šešiakampė.

224. Taisyklingosios piramidės pagrindo kraštinės ilgis yra a, o šoninės briaunos ilgis yra m. Apskaičiuokite piramidės aukštinės ilgį, jei piramidė yra:
a) trikampė; b) keturkampė; c) šešiakampė.

225. Piramidės pagrindas yra kvadratas, kurio kraštinės ilgis yra 8 cm. Piramidės aukštinės ilgis yra 15 cm ir ji eina per vieną pagrindo viršūnę. Raskite piramidės viso paviršiaus plotą.

226. Piramidės pagrindas yra lygiagretainis, kurio kraštinių ilgiai yra 50 cm ir 40 cm, o vienos įstrižainės ilgis yra 30 cm. Piramidės aukštinė eina per pagrindo įstrižainių susikirtimo tašką ir jos ilgis yra 9 cm. Apskaičiuokite piramidės šoninio paviršiaus plotą (1 cm^2 tikslumu).

227. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinės ilgis yra $2\sqrt{3}$ dm, o dvisienių kampų, kurių briaunos yra pagrindo kraštinės, didumai lygūs 30°. Apskaičiuokite piramidės šoninio paviršiaus plotą dviem būdais:
1) taikydami formulę $S_{\text{šon}} = \frac{1}{2}Ph$; čia P — pagrindo perimetras, h — apotema;
2) taikydami formulę $S_{\text{šon}} = \frac{Q}{\cos\alpha}$; čia Q — piramidės pagrindo plotas, α — dvisienis kampas prie pagrindo.

228. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninės briaunos ilgis yra 4 cm ir su pagrindu sudaro kampą α.
1) Įrodykite, kad piramidės tūris $V = 16\sqrt{3}\cos^2\alpha\sin\alpha$.
2) Apskaičiuokite piramidės tūrį, kai $\alpha = 30°$; 45°; 60°.

229. Piramidės pjūvis, statmenas jos aukštinei, dalija aukštinę santykiu 3 : 1 (imant nuo viršūnės). Apskaičiuokite pjūvio:
a) perimetrą, jei pagrindo perimetras lygus 32 m;
b) plotą, jei pagrindo plotas lygus 64 m^2.

230. Piramidės pjūvis, lygiagretus jos pagrindui, dalija aukštinę santykiu 2 : 5 (imant nuo viršūnės). Apskaičiuokite piramidės pagrindo:
a) perimetrą, jei pjūvio perimetras lygus 8 m;
b) plotą, jei pjūvio plotas lygus 4 m^2.

231. Pilies bokšto stogas yra taisyklingosios šešiakampės piramidės, kurios pagrindo kraštinės ilgis yra 2,4 m, o aukštis yra 6 m, formos. Apskaičiuokite stogo plotą.

232. Apskaičiuokite šešiakampės piramidės pagrindo kraštinės, aukštinės ir šoninės briaunos ilgius, jei jos pagrindo plotas lygus $24\sqrt{3}$ dm^2, o tūris yra $24\sqrt{3}$ dm^3.

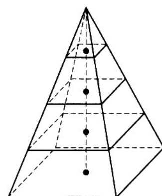
233. Varinė plokštelė yra taisyklingojo trikampio, kurio kraštinės ilgis yra 20,1 cm, formos. Apskaičiuokite šios plokštelės storį, jeigu plokštelė sveria 110 g, o vario tankis lygus 8,9 g/cm^3.

234. Kiek sveria betoninė piramidė, jei jos pagrindas yra kvadratas, kurio kraštinės ilgis yra 330 mm, o aukštis yra 360 mm? Betono tankis lygus 2,2 g/cm^3.

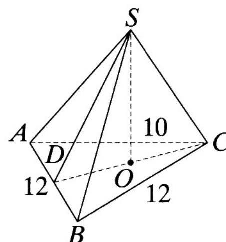
235. Plieninės taisyklingosios keturkampės piramidės aukštis yra 14,4 dm, o pagrindo kraštinės ilgis yra 23 dm. Piramidėje išgręžta skylė, kurios tūris sudaro 20% piramidės tūrio. Kiek sveria ši piramidė (plieno tankis yra 7,8 g/cm^3)?

236. Taisyklingosios trikampės piramidės šoninio paviršiaus plotas lygus 240 cm^2, o pagrindo perimetras lygus 48 cm. Apskaičiuokite piramidės:
a) pagrindo plotą; b) aukštį; c) tūrį.

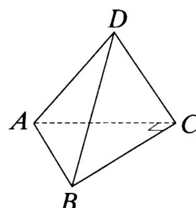
237. Piramidės aukštinė padalyta į keturias lygias dalis ir per dalijimosi taškus nubraižytos plokštumos, lygiagrečios pagrindui. Pagrindo kraštinės ilgis yra 40 cm. Raskite gautųjų pjūvių plotus.



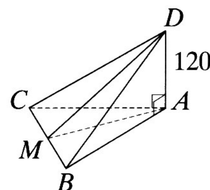
238. Piramidės pagrindas yra trikampis, kurio kraštinių ilgiai yra 10 cm, 12 cm ir 12 cm. Visi dvisieniai kampai prie pagrindo kraštinių lygūs 30°. Apskaičiuokite:
a) pagrindo plotą;
b) atstumą nuo trikampio pagrindo centro iki kraštinių;
c) piramidės apotemos ilgį; d) šoninių briaunų ilgius;
e) piramidės viso paviršiaus plotą; f) piramidės tūrį.



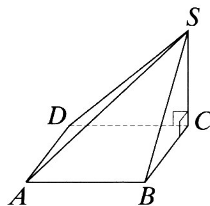
239. Piramidės pagrindas yra statusis trikampis, kurio statinių ilgiai yra 12 cm ir 16 cm. Piramidės visos šoninės briaunos lygios. Apskaičiuokite:
a) piramidės šoninės briaunos ilgį, kai piramidės aukštinė $h = 10\sqrt{3}$ m;
b) didumus kampų, kuriuos šoninės briaunos sudaro su pagrindo plokštuma;
c) dvisienių kampų, kurių briaunos yra AB, BC, AC, didumus.



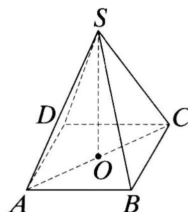
240. Piramidės aukštis yra 120 mm. Aukštinė eina per pagrindo viršūnę. Viena šoninė siena su pagrindo plokštuma sudaro 60° kampą. Piramidės pagrindas — lygiakraštis trikampis. Apskaičiuokite:
a) pagrindo kraštinės ilgį; b) pagrindo plotą;
c) šoninės sienos aukštinę DM;
d) piramidės šoninio paviršiaus plotą;
e) piramidės tūrį.



241. Piramidės pagrindas — kvadratas, kurio kraštinės ilgis yra 12 dm. Piramidės aukštinė eina per vieną pagrindo kraštinę, kurios ilgis yra 5 dm.
a) Įrodykite, kad $SB \perp AB$ ir $SD \perp AD$.
b) Apskaičiuokite piramidės viso paviršiaus plotą ir tūrį.
c) Koks piramidės viso paviršiaus plotas ir tūris, jei aukštinę pailgintume 50%; 110%?



242. Taisyklingosios keturkampės piramidės šoninės briaunos ilgis yra 8 cm, o pagrindo kraštinės ilgis — $3\sqrt{5}$ cm. Raskite:
a) piramidės viso paviršiaus plotą ir tūrį;
b) plotą pjūvio, einančio per taškus B, S, D;
c) dvisienio kampo, kurio briauna yra AB, didumą.
Įrodykite, kad ploštumos ASC ir BSD yra tarpusavyje statmenos.



243. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės aukštinės ilgis yra 12, o pagrindų kraštinių ilgiai yra $3\sqrt{2}$ ir $12\sqrt{2}$. Apskaičiuokite piramidės šoninės briaunos ilgį.

244. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės pagrindų kraštinių ilgiai yra 16 cm ir 40 cm, o aukštinės ilgis — 9 cm. Apskaičiuokite nupjautinės piramidės viso paviršiaus plotą.

245. Nupjautinės piramidės pagrindai yra taisyklingieji trikampiai, kurių kraštinių ilgiai yra 2 cm ir 5 cm. Viena šoninė briauna statmena pagrindo plokštumai ir jos ilgis yra 1,5 cm. Apskaičiuokite nupjautinės piramidės šoninio paviršiaus plotą ir tūrį.

246. Taisyklingosios šešiakampės piramidės apotemos ilgis yra 18, o dvisienis kampas prie pagrindo lygus $60°$. Apskaičiuokite piramidės viso paviršiaus plotą.

247. Taisyklingosios trikampės piramidės pagrindo kraštinės ilgis yra a. Šoninė siena pasvirusi į pagrindo plokštumą $45°$ kampu. Apskaičiuokite piramidės tūrį ir viso paviršiaus plotą.

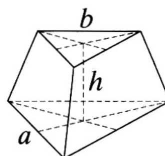
248. Parke buvo pastatyta granitinė nupjautinė piramidė. Jos aukštis yra 1,8 m, o pagrindai — kvadratai, kurių kraštinių ilgiai yra 1,6 m ir 4,2 m. Kiek sveria ši piramidė, jei granito tankis yra 2,5 t/m^3?

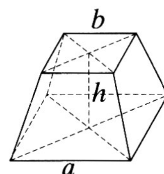
249. Nupjautinės piramidės pagrindų plotai lygūs 500 cm^2 ir 80 cm^2, o papildytos iki nenupjautinės piramidės aukštinės ilgis yra 40 cm. Apskaičiuokite nupjautinės piramidės tūrį.

250. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės aukštinės ilgis yra 10 cm, o tūris lygus 430 cm^3. Vieno pagrindo kraštinės ilgis yra 5 cm. Apskaičiuokite kito pagrindo kraštinės ilgį.

251. Nupjautinės piramidės aukštinės ilgis yra 9 cm, o tūris lygus 42 cm^3. Pagrindų plotų suma lygi 10 cm^2. Apskaičiuokite pagrindų plotus.

252. Brėžinyje pavaizduotos taisyklingosios nupjautinės piramidės. Abiejų piramidžių aukštinės ir pagrindų kraštinės yra lygios.
Apskaičiuokite kiek ir kurios piramidės:
a) paviršiaus plotas yra didesnis;
b) tūris yra mažesnis.
Atsakymus pateikite vienetų tikslumu, kai:
1) $a = 4$, $b = 2$, $h = 3\sqrt{3}$;
2) $a = 20$, $b = 10$, $h = 15$;
3) $a = \sqrt{17}$, $b = \sqrt{13}$, $h = \sqrt{11}$.





253. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės pagrindų įstrižainių ilgiai yra a ir b. Dvisienio kampo prie didesniojo pagrindo didumas lygus φ. Raskite piramidės:
a) šoninio paviršiaus plotą; b) tūrį.

254. Taisyklingosios keturkampės nupjautinės piramidės pagrindų įstrižainių ilgiai yra 2,4 m ir 4,8 m. Dvisienio kampo prie didesniojo pagrindo didumas lygus $60°$. Raskite piramidės:
a) šoninio paviršiaus plotą; b) tūrį.

5.4. SUKINIAI

255. Ritinio ašinis pjūvis — kvadratas, kurio plotas yra $16\,\text{m}^2$. Apskaičiuokite ritinio tūrį.

256. Ritinio šoninio paviršiaus plotas lygus $72\,\text{cm}^2$. Ašinio pjūvio įstrižainė sudaro su pagrindu kampą, kurio tangentas lygus 3. Apskaičiuokite ritinio pagrindo plotą.

257. Ritinio pagrindo apskritimo stygos ilgis yra $16\sqrt{2}\,\text{cm}$, styga jungia 90° lanko galus. Ritinio šoninio paviršiaus plotas lygus $640\pi\,\text{cm}^2$. Apskaičiuokite:
a) plotą pjūvio, einančio per šią stygą lygiagrečiai ritinio ašiai; b) ritinio tūrį.

258. Ritinio ašinio pjūvio įstrižainės ilgis yra $10\,\text{cm}$, įstrižainė su pagrindo plokštuma sudaro 30° kampą. Apskaičiuokite ritinio viso paviršiaus plotą ir tūrį.

259. Ritinio ašinio pjūvio plotas lygus $\frac{18}{\pi}$, o pagrindo skersmuo lygus 20. Apskaičiuokite ritinio tūrį ir viso paviršiaus plotą.

260. Ritinio pagrindo stygos ilgis yra $10\,\text{cm}$. Ši styga jungia 60° lanko galus. Pjūvio, einančio per tą stygą ir statmeną pagrindo plokštumai, plotas lygus $200\,\text{cm}^2$. Apskaičiuokite ritinio viso paviršiaus plotą.

261. Iš ketaus pagaminto vamzdžio išorinis plotis yra $25\,\text{cm}$, o sienelės storis yra $3\,\text{cm}$. Kiek sveria $2\,\text{m}$ ilgio vamzdis, jei ketaus tankis yra $7{,}3\,\text{kg/dm}^3$? Atsakymą suapvalinkite iki šimtųjų kilogramo.

262. Apskaičiuokite $3{,}5\,\text{m}$ ilgio apskrito vamzdžio išorinio ir vidinio paviršiaus plotus, kai jo išorinio skersmens ilgis yra $0{,}94\,\text{m}$, o sienelės storis yra $0{,}05\,\text{m}$.

263. Kiek tonų benzino galima laikyti ritinio formos cisternoje, kurios skersmens ilgis yra $5\,\text{m}$, o aukštis — $3\,\text{m}$? Benzino tankis yra $0{,}7\,\text{t/m}^3$.

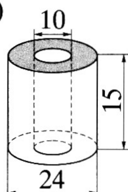
264. Ant būgno, kurio skersmuo yra $1\,\text{m}$, viena vija apvyniota 50 apvijų varinės vielos. Vielos skersmuo yra $3\,\text{mm}$. Kiek sveria ši viela, jei vario tankis yra $8{,}9\,\text{g/cm}^3$?

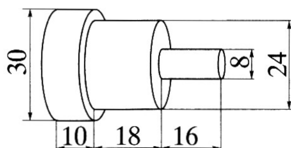
265. Iš aliuminio pagaminta viela, kurios skersmuo yra $4\,\text{mm}$. Viela sveria $6{,}8\,\text{kg}$. Apskaičiuokite vielos ilgį, jei aliuminio tankis yra $2{,}6\,\text{g/cm}^3$.

266. Lynas gali išlaikyti $150\,\text{kg/cm}^2$ krūvį. Kokį krūvį gali išlaikyti toks lynas, jei jo skersinio pjūvio apskritimo ilgis yra $12{,}56\,\text{cm}$?

267. Iš patalpos, kurios matmenys yra $8\,\text{m} \times 10\,\text{m} \times 3{,}5\,\text{m}$, orą traukia ventiliatorius, kurio apvalios angos skersmuo yra $24\,\text{cm}$. Praeinančio pro angą oro judėjimo greitis yra $60\,\text{cm/s}$. Per kiek laiko pro ventiliatoriaus angą praeis oro kiekis, lygus patalpos tūriui?

268. Apskaičiuokite brėžinyje pavaizduoto kūno tūrį ir viso paviršiaus plotą. Matmenys duoti centimetrais. Atsakymus suapvalinkite iki vienetų:

a)


b)


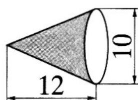
269. Pirmas rąstas trigubai plonesis ir trigubai ilgesnis už antrą.
a) Raskite jų masių santykį.
b) Kiek kartų antras rąstas turi būti trumpesnis už pirmąjį, kad abu rąstai svertų vienodai?

270. Įrodykite, kad dviejų lygiatūrių ritinių šoninių paviršių plotai yra atvirkščiai proporcingi pagrindų spindulių ilgiams.

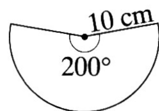
271. Kūgio formos grūdų krūvos aukštis yra 2,2 m, o pagrindo apskritimo ilgis lygus 20 m. Kiek tonų grūdų yra krūvoje, jei 1 m^3 grūdų sveria 740 kg?

272. Bokšto stogas yra kūgio formos. Stogo pagrindo skersmuo yra 9 m, o paviršiaus plotas lygus 250 m^2. Apskaičiuokite stogo aukštį. Atsakymą parašykite centimetrais.

273. Kūgio formos skardinio piltuvėlio skersmuo yra 10 cm, o aukštis — 12 cm. Apskaičiuokite šio piltuvėlio išklotinės spindulį ir kampą. (Į siūles nekreipkite dėmesio.)



274. Kūgio formos piltuvėliui pagaminti išpjauta skritulinė išpjova, kurios kampo didumas lygus 200°, o spindulio ilgis yra 10 cm. Apskaičiuokite piltuvėlio aukštį ir skersmenį.



275. Kūgio ašinis pjūvis yra statusis trikampis. Įrodykite, kad pjūvio plotas lygus kūgio pagrindo spindulio ilgio kvadratui.

276. Kūgio ašinio pjūvio plotas lygus 12, o šoninio paviršiaus ploto ir tūrio santykis lygus $\frac{5}{4}$. Apskaičiuokite kūgio pagrindo spindulio ilgį.

277. Kūgio ašinio pjūvio plotas lygus 24 cm^2, o kūgio pagrindo plotas lygus 32π cm^2. Apskaičiuokite kūgio tūrį.

278. Kūgio aukštinės ilgis yra 4 dm, o jo pagrindo spindulio ilgis — 5 dm. Per kūgio viršūnę S išvesta plokštuma, kertanti kūgio pagrindą atkarpa AB. Atstumas nuo kūgio pagrindo centro O iki pjūvio lygus 2,4 dm. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

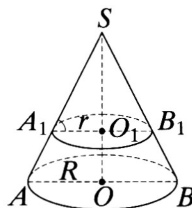
279. Nupjautinio kūgio pagrindų spinduliai yra R ir r, o sudaromoji pasvirusi į pagrindo plokštumą 60° kampu. Apskaičiuokite nupjautinio kūgio aukštinės ilgį ir ašinio pjūvio plotą.

280. Nupjautinio kūgio pagrindų spindulių ilgiai yra 1 m ir 2 m, o aukštinės ilgis — $\frac{4}{3}$ m. Apskaičiuokite nupjautinio kūgio:
a) sudaromosios ilgį; b) viso paviršiaus plotą; c) tūrį.

281. Nupjautinio kūgio pagrindų plotai yra 9 dm^2 ir 25 dm^2. Per kūgio aukštinės vidurio tašką nubrėžta plokštuma, lygiagreti pagrindams. Apskaičiuokite pjūvio plotą.

282. Nupjautinio kūgio sudaromoji pasvirusi į pagrindo plokštumą 45° kampu. Ašinio pjūvio plotas lygus Q. Apskaičiuokite nupjautinio kūgio šoninio paviršiaus plotą.

283. Kūgis perkirstas plokštuma lygiagrečia pagrindui. Žinoma, kad $AB = SO = 24\,\text{cm}$, $A_1O_1 = 8\,\text{cm}$. Apskaičiuokite:
a) kampo tarp kūgio sudaromosios ir plokštumos sinusą;
b) kūgio tūrį ir viso paviršiaus plotą;
c) $SO_1 : O_1O$.



284. Smėlio krūva yra nupjautinio kūgio, kurio aukštis yra 2,2 m, formos. Pagrindų apskritimų ilgiai yra 24 m ir 18 m.
a) Kiek sveria smėlio krūva, jei vienas kubinis centimetras sveria 2,5 g? Atsakymą išreikškite kilogramais.
b) Kiek reikia sunkvežimių, norint pervežti krūvoje esantį smėlį, kai vienos mašinos talpa yra 1,8 tonos?

285. Nupjautinio kūgio formos kibiro pagrindų spindulių ilgiai yra 18 cm ir 14 cm, o sudaromosios ilgis lygus 20 cm. Kiek reikia dažų, norint nudažyti 20 tokių kibirų, jei 1 m^2 nudažyti sumaudojama 150 g dažų?

286. Iš skritulio formos metalinio lapo pagamintas ritinio formos indas. Indo skersmuo yra 20 cm, o aukštis — 40 cm. Gaminant indą, lapo plotas nepasikeitė. Koks lapo skersmuo?

287. Rutulio tūris lygus $\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\text{dm}^3$. Raskite plotą sferos, apribotos šiuo rutuliu.

288. Iš dviejų švininių rutulių, kurių skersmenys yra 15 cm ir 20 cm, sulydytas vienas rutulys. Raskite naujo rutulio skersmenį.

289. Du švininiai rutuliai, kurių skersmenys yra 20 cm ir 28 cm, sulydomi į vieną masę ir iš jos išlydoma 5 švininiai rutuliukai. Koks naujo rutuliuko skersmuo?

290. Kiek rutuliukų, kurių skersmens ilgis yra 1 cm, galima išlydyti iš 1 kg masės švino? Švino tankis yra $11{,}4\,\text{g/cm}^3$.

291. Rutuliukas sveria 37 g, o jo skersmuo yra 2 cm. Raskite tankį medžiagos, iš kurios pagamintas šis rutuliukas.

292. Medinis rutuliukas sveria 315 g, o jo skersmuo yra 10 cm. Raskite medžio tankį.

293. Koks turi būti skersmuo kamštinio rutuliuko, kuris sveria 1 g, jei kamščio tankis yra $0{,}25\,\text{g/cm}^3$?

294. Kiek rutulių, kurių skersmuo yra 0,5 dm, galima nudažyti 1 kg dažų, jeigu 1 m^2 plotui nudažyti reikia 100 g dažų?

295. Kiek reikės dažų, norint nudažyti 100 medinių rutuliukų, kurių kiekvieno skersmuo yra 10 cm, jeigu 1 dm^2 nudažyti sumaudojama 1,2 g dažų?

296. Yra 100 varinių 2,8 cm skersmens rutuliukų. Kiekvieną rutuliuką reikia padengti 0,02 mm sidabro sluoksniu. Kiek gramų sidabro reikės, jei sidabro tankis yra $10{,}5\,\text{g/cm}^3$? Atsakymą pateikite 0,1 tikslumu.

297. 50 cm skersmens rutulys padengtas 3 mm storio bronzos sluoksniu. Kiek gramų bronzos sunaudota rutulio padengimui, jei bronzos tankis yra $8{,}2\,\text{g/cm}^3$. Atsakymą užrašykite vieneto tikslumu.

298. Ant rutulio paviršiaus yra trys taškai. Atstumai tarp šių taškų lygūs 12 cm, 16 cm ir 20 cm. Rutulio spindulio ilgis yra 26 cm. Raskite atstumą nuo rutulio centro iki plokštumos, einančios per tuos taškus.

299. Rutulio spindulio ilgis yra 2,5 cm. Ant rutulio paviršiaus pažymėtas taškas T ir nubrėžtas apskritimas, kurio visi taškai yra nutolę nuo taško T 3 cm atstumu. Apskaičiuokite to apskritimo ilgį.

300. Rutulio spindulio ilgis yra 13 cm. Rutulys liečia visas taisyklingojo trikampio kraštines, kurių ilgis yra 24 cm. Raskite atstumą nuo rutulio centro iki trikampio plokštumos.

301. Rutulio spindulys yra R. Šį rutulį kerta plokštuma, nutolusi nuo centro atstumu d. Apskaičiuokite:
a) pjūvio ploto ir rutulio paviršiaus ploto santykį;
b) sferos nuopjovų plotų santykį;
c) rutulio nuopjovų tūrių santykį.

302. Rutulio paviršiaus plotas lygus 100. Raskite rutulio didžiausiojo pjūvio plokštuma plotą.

303. Rutulio skersmens ilgis yra 18 cm. Rutulio skersmeniui statmena plokštuma dalija skersmenį santykiu 1 : 2. Apskaičiuokite gautų rutulio dalių tūrį.

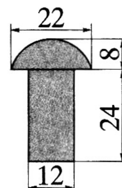
304. Rutulio, kurio spindulys yra R, išpjovos ašinio pjūvio kampo didumas yra 120°. Raskite išpjovos tūrį.

305. Rutulio išpjovos ašinio pjūvio kampo didumas lygus 120°. Apskaičiuokite mažesniosios rutulio išpjovos tūrį, jei į ją įeinančios nuopjovos pagrindo spindulys yra r.

306. Bokšto vidinę dalį sudaro ritinys ir rutulinė nuopjova. Ritinio skersmuo lygus 7,14 m, o aukštis yra 7,2 m. Rutulinės nuopjovos aukštis yra 0,8 m. Kiek tonų siloso galima patalpinti šiame bokšte, jei kubinis metras siloso sveria $\frac{2}{3}$ tonos?

307. Švininis 10 cm skersmens rutulys suplotas į apskritą 2 mm storio blyną. Apskaičiuokite blyno skersmenį milimetrų tikslumu.

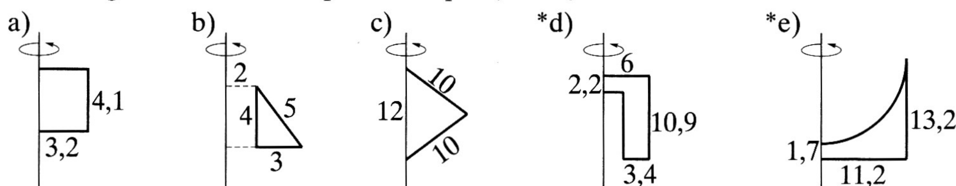
308. Brėžinyje nurodyti plieninės kniedės su rutulio nuopjovos formos galvute matmenys milimetrais. Kiek kilogramų svers 1000 tokių kniedžių, jei plieno tankis yra 7,8 g/cm^3? Atsakymą užrašykite kilogramais dešimtųjų tikslumu.



309. Į ritinio formos indą, kurio pagrindo spindulio ilgis yra 10 cm, įdėtas rutulys, kurio spindulio ilgis yra 8 cm. Vandens aukštis inde yra 16 cm. Koks bus vandens aukštis inde, jei išimsime rutulį?

310. Indas yra ritinio formos. Jo pagrindo skersmuo ir aukštis yra lygūs. Inde yra rutulys, kuris liečia indo sienas, dugną ir vandens paviršių. Jei rutulį išimtume iš indo, tai vandens lygis sumažėtų 16 cm. Koks rutulio tūris?

311. Detalė gaunama sukant paveikslėlyje pavaizduotą figūrą apie nurodytą ašį. Apskaičiuokite gauto sukinio viso paviršiaus plotą ir tūrį:



312. Įrodykite, kad kubo paviršiaus plotas mažesnis už sferos, liečiančios visas jo briaunas, plotą.

313. Kūgio aukštinės ilgis yra 12 dm, o sudaromosios — 13 dm. Raskite į kūgį įbrėžto rutulio spindulio ilgį.

314. Rutulio spindulio ilgis yra 20 cm. Į šį rutulį įbrėžtas kūgis, kurio pagrindo spindulio ilgis yra 16 cm, o ašinio pjūvio kampas yra smailus. Raskite kūgio tūrį ir šoninio paviršiaus plotą.

315. Raskite rutulio apibrėžto apie kubą, kurio briaunos ilgis yra 20, spindulio ilgį.

316. Stačiakampio gretasienio matmenys yra a, b ir c. Raskite apie gretasienį apibrėžto rutulio spindulio ilgį.

317. Sferos spindulys lygus R. Į sferą įbrėžtas kubas. Raskite kubo briaunos ilgį.

318. Sferos spindulys lygus R. Į sferą įbrėžtas tetraedras. Raskite tetraedro briaunos ilgį.

319. Į tetraedrą, kurio briauna lygi a, įbrėžtas rutulys. Raskite rutulio spindulio ilgį.

320. Taisyklingosios trikampės prizmės aukštinės ilgis yra H. Ši prizmė įbrėžta į rutulį, kurio spindulys yra R. Raskite prizmės pagrindo briaunos ilgį.

321. Taisyklingoji šešiakampė prizmė įbrėžta į rutulį, kurio spindulys yra R. Prizmės aukštinė lygi rutulio spinduliui. Raskite prizmės šoninio paviršiaus plotą.

322. Taisyklingosios keturkampės prizmės briaunos ilgis yra a. Ši prizmė įbrėžta į rutulį, kurio spindulys yra R. Raskite prizmės viso paviršiaus plotą ir tūrį.

323. Į taisyklingąją trikampę prizmę, kurios pagrindo kraštinė lygi a, įbrėžta sfera. Raskite sferos paviršiaus plotą.

324. Į rutulį, kurio spindulys yra R, įbrėžtas ritinys. Ritinio ašinio pjūvio įstrižainė su pagrindu sudaro 60° kampą. Raskite ritinio viso paviršiaus plotą ir tūrį.

325. Į ritinį įbrėžtas rutulys.
a) Kiek kartų ritinio viso paviršiaus plotas didesnis už rutulio paviršiaus plotą?
b) Kiek kartų ritinio tūris didesnis už rutulio tūrį?

326. Į kūgį įbrėžta taisyklingoji keturkampė piramidė, kurios šoninės briaunos ilgis yra 6 ir kuri pasvirusi į pagrindo plokštumą 60° kampu. Apskaičiuokite kūgio tūrį.

327. Į taisyklingąją trikampę piramidę įbrėžtas kūgis. Kūgio sudaromoji pasvirusi į pagrindo plokštumą 60° kampu. Kūgio aukštinės ilgis yra 3. Apskaičiuokite piramidės ir kūgio tūrius.

ATSAKYMAI

1 SKYRIUS

1. a) $(-1; 7)$; b) $(-6; -2)$; c) $(-2; 0)$; d) $(0; 4)$; e) $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$; f) $(-4; 4)$; g) $(-\infty; 4) \cup (6; +\infty)$; h) $(-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$.

2. a) $|x-2| < 3$; b) $|x| < 2$; c) $|x-10| < 0{,}1$; d) $|x-5| < 0{,}01$; e) $|x-3| > 0{,}5$; f) $|x-1| > 0{,}5$.

3. a) $|x-5{,}5| < 1{,}5$; b) $|x-3| < 0{,}1$; c) $|x+1{,}75| < 0{,}25$; d) $|x+2{,}625| > 0{,}375$; e) $|x+4{,}85| > 0{,}15$; f) $|x+0{,}1| < 0{,}2$; g) $|x-0{,}15| < 0{,}05$; h) $|x| < 0{,}2$.

4. a) $(2{,}5; 3{,}5)$; b) $(2{,}75; 3{,}25)$; c) $(2{,}9; 3{,}1)$; d) $(2{,}95; 3{,}05)$.

5. 3) $[3{,}375; 15{,}625]$;

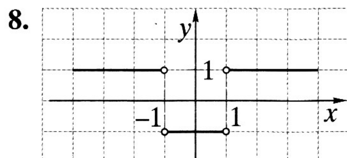
4)

x	1,97	1,98	1,99	2	2,01	2,02	2,03
x^3	7,645373	7,762392	7,880599	8	8,120611	8,242408	8,365427
$\|x^3-8\|$	0,354627	0,237608	0,119401	0	0,120611	0,242408	0,365427

5) $\delta = \sqrt[3]{8{,}3} - 2$; 6) $\delta = \sqrt[3]{8{,}2} - 2$; 7) $\delta = \sqrt[3]{8{,}01} - 2$.

6. a), b), e), j), k), l). **7.** a) 2; b) 4; c) 7; d) 1; e) $\frac{2}{3}$; f) 16.

8.



a) Ne; b) ne.

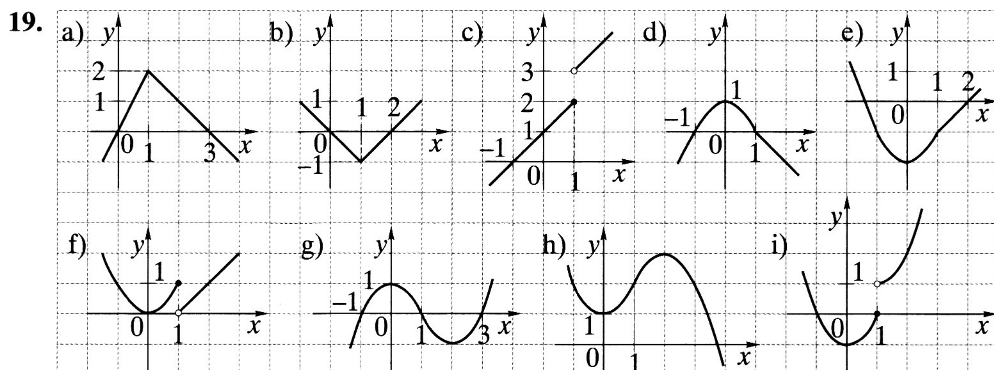
9. a) -1; b) 4; c) -6; d) 2. **10.** a) 2,5; b) -3; c) -2; d) 2.

11. a) 3; b) 4; c) 6; d) 12; e) 32; f) 192. **12.** Pavyzdžiui, $f(x) = \frac{(x-2)^2+(x-2)}{x-2}$.

13. a) $\frac{3}{4}$; b) 1; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{4}$. **14.** a) $-\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2}$; c) 1; d) $-\frac{1}{4}$. **15.** a) $\frac{1}{12}$; b) $\frac{1}{12}$.

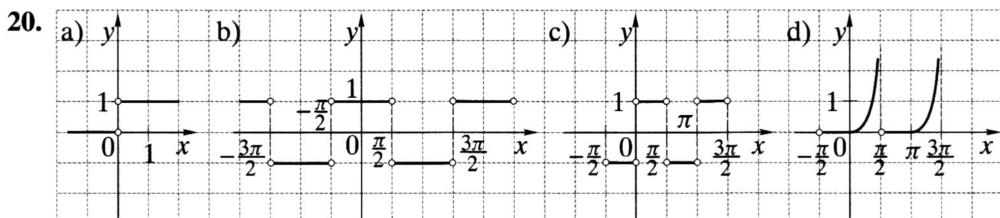
17. $a = 0$. **18.** x_3, x_5, x_7, x_9.

19.



Funkcija $f(x)$ tolydi taške $x = 1$ atvejais a), b), d), e), g) ir h).

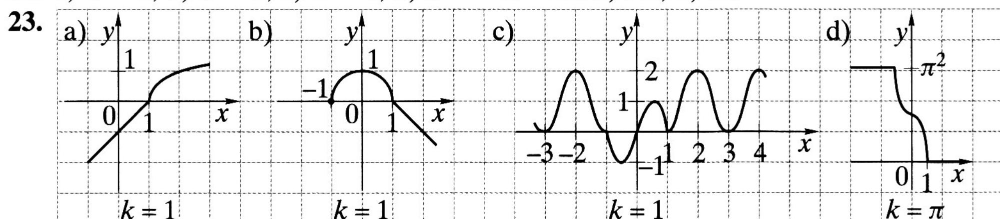
20.



Funkcija $g(x)$ trūki: a) taške $x = 0$; b) taškuose $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; c) taškuose $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; d) taškuose $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

21. a) $k = 1$; b) $k = 2$; c) $k = 1$; d) $k = -1$. **22.** a) Ne; b) ne.

23.



24. Nėra tolydi nė viename taške.

26. Pvz., $f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{kai } x \text{ racionalus,} \\ 0, & \text{kai } x \text{ iracionalus.} \end{cases}$

27. 2. a) 4; b) -2; c) 1; d) -1.

28. a) $-\frac{2}{11}$; b) $\frac{19}{81}$; c) $\frac{19}{81}$; d) $-\frac{21}{121}$; e) $\Delta f(2) \approx -0{,}02324$; f) $\Delta f(-2) \approx 0{,}0201$.

31. 2. a) $T(4) - T(3) = 7{,}425$; b) $T(11) - T(10) = 4{,}275$; c) $T(20) - T(19) = 0{,}225$.

32. a) 4,2; b) 3,7; c) $\frac{2}{3}$; d) $\frac{5}{6}$; e) 0,4; f) $\frac{4}{9}$.

33. a) (0; 1) — lietimosi taškas; b) (2; 9) — lietimosi taškas; c) bendrų taškų neturi; d) $(-1; 0)$ ir (3; 16) — kirtimosi taškai; e) (0; 1) ir $(-4; 9)$ — kirtimosi taškai; f) (0; 1) ir $(-3; 4)$ — kirtimosi taškai.

34. a) Ne; b) ne; c) ne; d) ne.

35. a) $y = 2x - 8$, $\varphi \approx 63°26'$; b) $y = x - 6$, $\varphi = 45°$; c) $y = -2x$, $\varphi \approx 116°34'$; d) $y = -3x + 2$, $\varphi \approx 108°26'$.

37. a) $\operatorname{arctg} 9$; b) $\pi - \operatorname{arctg} 4$; c) $\frac{\pi}{3}$; d) $\frac{3\pi}{4}$.

38. a) 0; b) 6; c) -3; d) 0; e) $-\frac{1}{2}$; f) $-\frac{1}{8}$; g) 0; h) 0.

39. a) 3; b) -7; c) -12; d) -1; e) 3; f) $-\frac{7}{9}$; g) $\frac{1}{4}$; h) $\frac{3}{2}$.

40. a) $f'(x) = 4$; b) $f'(x) = 8x$; c) $f'(x) = \frac{-3}{(x+3)^2}$; d) $f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2}$; e) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$; f) $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{3-2x}}$.

41. a) ir **B**; b) ir **A**; c) ir **D**; d) ir **C**. **47.** a) $t = 5$, $t = 10$; b) $a = 1$ m/s^2; c) $t = 0$ s.

48. a) $p'(x) = 12x^3 - 12x^2 + 4x$; b) $p'(x) = 15x^2 - 12x + 1$; c) $p'(x) = 27x^2 - 8x + 2$; d) $p'(x) = 24x^5 - 15x^4 - 14x$; e) $p'(x) = 28x^6 - 27x^2 + 2x$.

49. a) $p'(1) = 0$; b) $p'(0) = -10$; c) $p'(-1) = 42$; d) $p'(1) = -25$; e) $p'(0) = -15$; f) $p'(1) = 6$; g) $p'(-1) = 29$.

50. a) $x = 2$; b) $x_1 = 3$; $x_2 = 4$. **51.** a) $(1; +\infty)$; b) $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$.

52. a) Teisinga; b) teisinga.

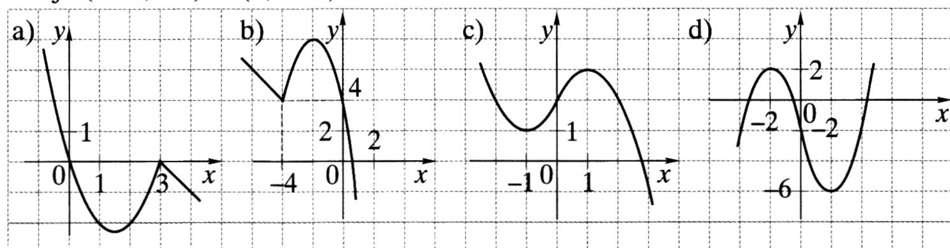
53. a) $y = 2$; b) $y = -3x + 5$; c) $y = -11x - 7$; d) $y = 44x - 128$.

54. a) $(-\sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$; b) (1; 0), $(-1; -4)$; c) (3; 9).

56. $p = 3$; $q = -2$. **57.** $p = 3$; $q = 2$. **61.** $y = 2x - 1$, $y = 6x - 9$.

63. a) x_2, x_4, x_{10}; b) x_3, x_9; c) $(x_2; x_3)$, $(x_4; x_5)$, $(x_8; x_9)$, $(x_{10}; +\infty)$; d) $(-\infty; x_2)$, $(x_3; x_4)$, $(x_5; x_7)$, $(x_7; x_8)$, $(x_9; x_{10})$.

64. a) Gali, pvz., $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{\cos x}$. b) Gali, pvz., $f(x) = \frac{-1}{\cos x}$, $g(x) = \frac{1}{|\cos x|}$.
66. Mažėja. **67.** 1) Ne; 2) taip.
68. 1) Per 2 pastumti į kairę, apsukti apie x ašį, pakelti per 2; 2) nėra nei lyginė, nei nelyginė; 3) $x_{\max} = 1$; $x_{\min} = -5$; 4) $g(1) = 7$ (maksimumas), $g(-5) = -3$ (minimumas).
69. a) $(-\infty; 3)$; b) $(-\infty; -4)$; c) $(-1; +\infty)$; d) $(2; +\infty)$; e) $\left(-\infty; \frac{3}{2}\right)$; f) $(3; +\infty)$.
70. a) $(-4; +\infty)$; b) $(-\infty; 3)$; c) $(3; +\infty)$; d) $(-\infty; -2)$; e) $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; f) $(-\infty; -1)$.
71. a) Mažėja $(-\infty; 1{,}5)$ ir $(3; +\infty)$, didėja $(1{,}5; 3)$; b) mažėja $(-\infty; -4)$ ir $(-2; +\infty)$, didėja $(-4; -2)$; c) mažėja $(-\infty; -1)$ ir $(1; +\infty)$, didėja $(-1; 1)$; d) mažėja $(-2; 2)$, didėja $(-\infty; -2)$ ir $(2; +\infty)$.



73. a) Brėžinyje A — funkcijos $g(x)$, o B — funkcijos $f(x)$ grafikai. b) Funkcija $f(x)$ mažėjanti $(-\infty; -2)$ ir $(1; 2)$, didėjanti $(-2; 1)$ ir $(2; +\infty)$; funkcija $g(x)$ mažėjanti $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ ir $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$, didėjanti $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ ir $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.
74. a) $(-\infty; -1)$ ir $(0; 1)$; b) $(-\infty; 0)$; c) $(-\infty; -2)$ ir $(0; 2)$; d) $(-3; 0)$ ir $(3; +\infty)$.
76. a) $(-2; 0)$; b) $(-2; 1)$; c) $\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right)$; d) $(-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3})$.
77. a) $(-\infty; 0)$; b) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$, $(3; +\infty)$; c) $(1; 3)$; d) $(0; +\infty)$.
80. a) Didėja $(-1; 1)$, mažėja $(-\infty; -1)$ ir $(1; +\infty)$; b) didėja $(-2; 2)$, mažėja $(-\infty; -2)$, $(2; +\infty)$; c) didėja $(-\infty; 1)$, $(3; +\infty)$, mažėja $(1; 3)$; d) didėja $(-\infty; -1)$, $(2; +\infty)$, mažėja $(-1; 2)$; e) didėja $(-\infty; -1)$, $(5; +\infty)$, mažėja $(-1; 5)$; f) didėja $(-1; 0)$ ir $(1; +\infty)$, mažėja $(-\infty; -1)$ ir $(0; 1)$; g) didėja $(1; +\infty)$, mažėja $(-\infty; 1)$; h) didėja $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$, mažėja $(-1; 1)$; i) didėja $(-\infty; -\sqrt{2})$, $(\sqrt{2}; +\infty)$, mažėja $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$; j) didėja $(\sqrt[3]{6}; +\infty)$, mažėja $(-\infty; \sqrt[3]{6})$.
81. 2) a) 8,12; b) 99 840 000; c) 1,02; d) 1,996. **82.** $(2a; 4a^2)$.
83. a) 2; b) 3; c) 2; d) -1; e) -3; 1; f) 2; 3; g) -2; 3; h) -1; 4; i) -2; $-\frac{4}{9}$; j) 0; k) 2.
85. a) $\frac{1}{2}$; b) $(-\infty; -1]$; c) $[-1; 1]$; d) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.
86. a) $-\frac{1}{2}$; 0; $\frac{1}{2}$; b) -3; $\frac{1}{4}$; c) 3; 3,5; 4; d) 0; 1; 2; e) 1; 2; f) 1; 3; g) -3; -2; $\frac{1}{2}$; 2; h) $[-\sqrt{3}; -1]$; 0; $[1; \sqrt{3}]$; i) -1; 0; j) $\sqrt{3}$; k) 0; l) -1; 0; 1.
87. a) $a_1 = -3$, $a_2 = 3$; b) $a_1 = -5$, $a_2 = 5$.
88. a) $x_{\min} = 1$; b) $x_{\max} = 3$; c) $x_{\min} = -2$, $x_{\max} = 2$; d) $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = -1$; e) $x_{\min} = -1$, $x_{\max} = 0$, $x_{\min} = 1$; f) $x_{\min} = 1$.
89. a) Ekstremumų nėra; b) $x_{\max} = -1$, $x_{\min} = 0{,}5$; c) $x_{\min} = 0$; d) $x_{\min} = -0{,}5$; e) $x_{\min} = -4$, $x_{\min} = -2$, $x_{\min} = 2$, $x_{\min} = 4$, $x_{\max} = -3$, $x_{\max} = 0$, $x_{\max} = 3$; f) $x_{\min} = -6$, $x_{\min} = -2$, $x_{\min} = 2$, $x_{\min} = 6$, $x_{\max} = -4$, $x_{\max} = 0$, $x_{\max} = 4$; g) ekstremumų neturi; h) $x_{\max} = 0$.
90. a) $x_{\min} = 3$; b) $x_{\max} = 3$; c) $x_{\min} = -\frac{1}{2}$; d) $x_{\max} = -\frac{1}{2}$. **91.** $k \in [3; +\infty)$.
92. a) Ekstremumų neturi; b) $f(4) = 16$ (maksimumas); c) $f(1) = 1$ (minimumas); d) $f(3) = -3{,}5$ (minimumas); e) $f(2) = 5$ (maksimumas); f) $f(0) = 0$ (maksimumas); $f(1) = -1$ (minimumas); g) $f(-1) = 4\frac{1}{6}$ (maksimumas); $f(2) = -\frac{1}{3}$ (minimumas); h) $f(-1) = 17$ (maksimumas); $f(3) = -47$ (minimumas); i) $f(-1) = 7\frac{1}{6}$ (maksimumas);

$f(4) = -13\frac{2}{3}$ (minimumas); j) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1\frac{3}{4}$ (minimumas); $f(-4) = 184$ (maksimumas); k) $f(1) = 10\frac{5}{6}$ (maksimumas); $f(6) = -10$ (minimumas); l) $f(-1) = 3$ (maksimumas); $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{17}{27}$ (minimumas).

93. a) $f(0) = 9$ (maksimumas); b) $f(0) = 1$ (minimumas); c) $f(0) = 0$ (minimumas), $f(4) = -10\frac{2}{3}$ (minimumas), $f(1) = \frac{7}{12}$ (maksimumas); d) $f(0) = 5$ (maksimumas), $f(-2) = -1\frac{2}{3}$ (minimumas), $f(4) = -37\frac{2}{3}$ (minimumas).

94. a) $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$ didėja, $(-1; 1)$ — mažėja, $f(-1) = 4$ (maksimumas), $f(1) = -4$ (minimumas); b) $(-1; 1)$ didėja, $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$ mažėja, $f(-1) = -2$ (minimumas), $f(1) = 2$ (maksimumas).

95. a) $f(0) - g(0) = 3$; b) $f(0) - g(0) = 5$. **96.** a) $a = -3$. **97.** $\left(-1; \frac{1}{4}\right)$.

98. $t = 1$ sek., 7 m/sek. **99.** a) $t_1 = 0$, $t_2 = 6$; b) $t_1 = 3$ s, $v = 54$ (cm/s).

100. a) 1) $t_0 = 4$; 2) 21 m/s; b) 1) $t_0 = 7$; 2) 23,5 m/s. **101.** a) $4\frac{27}{80}$ m; b) $2\frac{32}{45}$ m.

103. a) $g'(x) = 8x^3 - 74x + 28$; b) $g'(x) = 48x^3 - 74x + 10$; c) $g'(x) = 6x^5 - 15x^4 + 48x^3 - 60x^2 + 84x - 12$; d) $g'(x) = 6x^5 + 30x^4 + 12x^3 + 66x^2 + 12x + 9$.

104. a) $f'(x) = 3{,}5x^2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}$; b) $f'(x) = 7x^3\sqrt{x} - 22{,}5x^2\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$;
c) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} \cdot (7x^2 - 10x - 6)$; d) $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} \cdot (7x^2 + 20x - 3)$;
e) $f'(x) = \sqrt{3}(5x^4 - 9x^2 + 2x + 2)$; f) $f'(x) = \sqrt{2}(5x^4 - 6x^2 - 4x + 3)$.

105. a) -3; b) $-\frac{5}{4}$; c) -4; d) -2; e) 1; f) 1. **106.** a) 13; b) -15; c) 12; d) -20.

108. a) $6x - 6$; b) $5 - 9x$; c) $9x^2 - 3x - 2$; d) $18x^2 - 21x + 10$; e) $-27x^2 + 30x - 13$; f) $-9x^2 - 3x + 9$; g) $27x^3 - 45x^2 + 12x + 5$; h) $54x^3 - 18x^2 - 21x + 11$.

109. a) $8x^4 - 8x^2 + 1$; b) $-x^4 + 4x^2 - 2$; c) $x^4 - 2x^3 + x$; d) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x$.

111. a) 1) $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; 2) $h(x) = -\frac{1}{x}$; 3) $D(h) = (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$; b) 1) $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; 2) $h(x) = \frac{x-1}{x}$; 3) $D(h) = (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$; c) 1) $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$; 2) $h(x) = \frac{x-9}{3x-2}$; 3) $D(h) = (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$; d) 1) $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; 2) $h(x) = \frac{7x-4}{2x-1}$; 3) $D(h) = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty)$.

113. $x|x|^7$.

114. a) $f^2(x) = 1$; b) $f(f(x)) = f(x)$; c) $f\left(\frac{1}{f^2(x)}\right) = 1$; d) $f(|x|) = \begin{cases} 1, x \neq 0, \\ -1, x = 0; \end{cases}$
e) $f\left(\frac{|x|}{x}\right) = \begin{cases} 1, x > 0, \\ -1, x < 0; \end{cases}$ f) $f(x) - f(|x|) = \begin{cases} 0, x \geqslant 0, \\ -2, x < 0; \end{cases}$ g) $f(x - |x|) = -1$; h) $f(x^2) = \begin{cases} 1, & \text{kai } x \neq 0, \\ -1, & \text{kai } x = 0; \end{cases}$ i) $f(x) + f(|x|) = \begin{cases} 2, x > 0, \\ -2, x = 0, \\ 0, x < 0; \end{cases}$ j) $f(x^3) = f(x)$.

115. Taip. **116.** Taip.

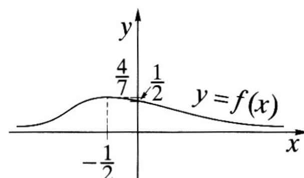
118. a) $f(x) = 3x - 2$; b) $f(x) = 2x + 3$; c) $f(x) = -3x^2 + x + 4$; d) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$; e) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 4$; f) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x + 3$; g) $f(x) = \frac{x+2}{2x-1}$; h) $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$.

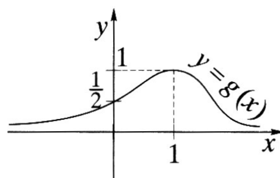
119. a) $D(f) = (-4; 4)$; b) $D(f) = (0; 1)$; c) $D(f) = (1; 2]$;
d) $D(f) = [-\sqrt{17}; -4) \cup (4; \sqrt{17}]$.

120. a) **A**: $f(g(x)) = 2 - 2x$; **B**: $g(f(x)) = 4 - 2x$; b) **A**: $g(f(x)) = |x^2 - 4x + 3|$; **B**: $f(g(x)) = x^2 - 4|x| + 3$; c) **A**: $g(f(x)) = 1 - \sqrt{x}$; **B**: $f(g(x)) = \sqrt{1 - x}$;
d) **A**: $f(g(x)) = 2^{1-x}$; **B**: $g(f(x)) = 1 - 2^x$; e) **A**: $f(g(x)) = \log_2(-x)$;
B: $g(f(x)) = -\log_2 x$; f) **A**: $g(f(x)) = \sin^2 x$; **B**: $f(g(x)) = \sin x^2$.

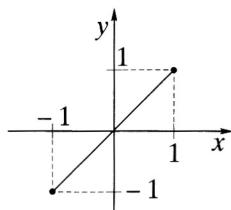
121. a) $f'(x) = 24(3x - 1)^7$; b) $f'(x) = -18(3 - 2x)^8$; c) $f'(x) = 6(x^2 - 5x - 9) \cdot (2x - 5)$; d) $f'(x) = 21(3x^2 + 9x + 1)^6 \cdot (2x + 3)$; e) $f'(x) = 6(x^5 + 6x^3)^5 \cdot (5x^4 + 18x^2)$; f) $f'(x) = 4(x^6 - 7x^5)^3 \cdot (6x^5 - 35x^4)$.

122. a) $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$; b) $g'(x)=\frac{-2}{\sqrt{3-4x}}$; c) $g'(x)=\frac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}$; d) $g'(x)=-\frac{2x+3}{2\cdot\sqrt{2-3x-x^2}}$; e) $g'(x)=-\frac{1}{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}$; f) $g'(x)=\frac{3}{2(5-3x)^{\frac{3}{2}}}$; g) $g'(x)=-\frac{4x+3}{2\cdot(2x^2+3x)^{\frac{3}{2}}}$;
h) $g'(x)=\frac{2x}{(5-2x^2)^{\frac{3}{2}}}$.
123. a) 2; b) 7; c) 16; d) -16; e) 2; f) -1; g) 0; h) -1.
124. a) $y=2x-8$; b) $y=4x+8$. **125.** a) $(1;-1)$; b) $(1;1)$.
126. a) $(4;0)$, $(1;-27)$; b) $(0;0)$, $(1;1)$, $(2;0)$.
127. a) $(0;1)$; b) $(0;-1)$.
128. 1. $y=\frac{1-x_0}{\sqrt{2x_0-x_0^2}}(x-x_0)+\sqrt{2x_0-x_0^2}$; 2. $B\left(0;\ \frac{x_0}{\sqrt{2x_0-x_0^2}}\right)$.
129. 1) $y=1{,}5x-2{,}5$; 2) $(0;-2{,}5)$; 3) 5 kv. v.
130. a) $y=-x-1$; b) $y=-2x+2$; c) $y=-3x+5$; d) $y=3x-4$.
131. $A_1(0;-2)$; $A_2(-2;6)$. **132.** a) $A_1(0;-1)$, $A_2(-2;3)$; b) $A_1\left(-\frac{1}{2};-3\right)$, $A_2\left(-\frac{3}{2};5\right)$.
133. $(0;1)$. **134.** a) $(1;0)$; b) $k=0$. **135.** a) $\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{9}$; b) $\pi-\operatorname{arctg}4$.
136. a) $4y-5x+6=0$; b) $y=-5x+2$. **138.** a) $\frac{1}{2}$; b) $-\frac{3}{2}$; c) $-\frac{3}{2}$; d) $-2\frac{3}{4}$.
139. a) $(-\infty;1)$, $(3;+\infty)$ mažėja, $(1;3)$ didėja, $f(1)=-\frac{1}{4}$ (minimumas); b) $(-\infty;-4)$, $(2;+\infty)$ mažėja, $(-4;2)$ didėja, $f(-4)=-\frac{1}{12}$ (minimumas).
140. 1. $D(f)=\boldsymbol{R}$, $D(g)=\boldsymbol{R}$; 2. $f'(x)=\frac{-(2x+1)}{(x^2+x+2)^2}$, $g'(x)=\frac{2-2x}{(x^2-2x+2)^2}$; 3. $f(x)$ intervale $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ didėja, $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ mažėja; $g(x)$ intervale $(-\infty;1)$ didėja, $(1;+\infty)$ mažėja; 4. $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{7}$ (maksimumas), $g(1)=1$ (maksimumas); 6. $E(f)=\left(0;\frac{4}{7}\right]$, $E(g)=(0;1]$.

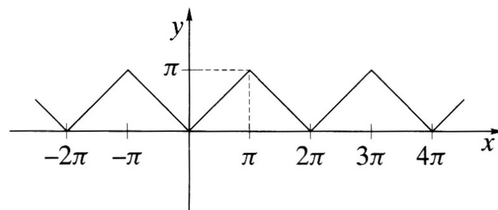




142. a) $\left(\frac{3}{5};\frac{6}{5}\right)$; b) $\left(\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right)$. **143.** b) $\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
145. a) $D(f)=\boldsymbol{R}$, $E(f)=[-1;1]$; b) $D(f)=\boldsymbol{R}$, $E(f)=[-3;3]$;
c) $D(f)=\boldsymbol{R}$, $E(f)=[-1;1]$; d) $D(f)=\boldsymbol{R}$, $E(f)=[-2;2]$;
e) $D(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, $E(f)=[-5;5]$; f) $D(f)=\boldsymbol{R}$, $E(f)=\boldsymbol{R}$;
g) $D(f)=\boldsymbol{R}$, $E(f)=[-5;5]$; h) $D(f)=\boldsymbol{R}$, $E(f)=[2-\sqrt{13};2+\sqrt{13}]$.
147. a) $T=\pi$; b) $T=2$; c) $T=\frac{2\pi}{3}$; d) $T=4$; e) $T=\pi$; f) $T=\pi$.
148. **A** — $g(x)$ grafikas, **B** — $f(x)$ grafikas.
149.



$f(x)=\cos(\arccos x)$



$g(x)=\arccos(\cos x)$

150. a) $x\neq 2k+1, k\in\boldsymbol{Z}, E(f)=\boldsymbol{R}$; b) $x\neq k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}, k\in\boldsymbol{Z}, E(f)=\boldsymbol{R}$; c) $\left[\pi k;\ \frac{2k+1}{2}\pi\right), k\in\boldsymbol{Z}, E(f)=[0;+\infty)$; d) $x\neq k\pi, k\in\boldsymbol{Z}, E(f)=\boldsymbol{R}$.

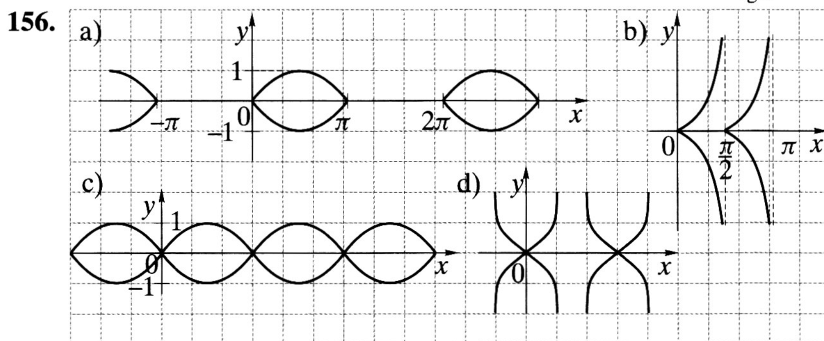
152. a) $T=\frac{\pi}{2}$; b) $T=2\pi$; c) $T=\pi$; d) $T=1$; e) $T=\pi$; f) $T=\pi$.

153. a) Lyginė; b) nelyginė; c) nelyginė; d) nelyginė; e) nėra nei lyginė, nei nelyginė; f) nėra nei lyginė, nei nelyginė.

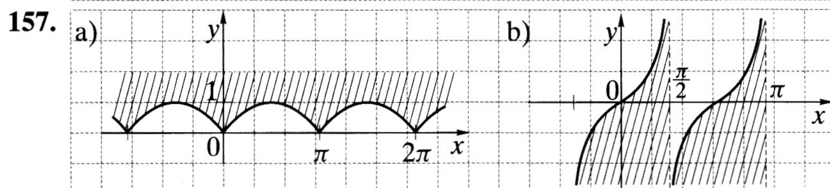
154. **A** — $f(x)$, o **B** — $g(x)$ grafikai.

155. *Patarimas.* Pasinaudokite 154 uždaviniu ir lygybe $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

156.



157.



158. a) -1; b) 1; c) $\frac{2}{3}$; d) -1; e) 0; f) 2. **159.** a) 1; b) $3\frac{1}{3}$; c) $4\frac{1}{2}$; d) 2.

160.

z	0,5	0,1	0,05	0,01	0,005	0,001
$\frac{\sin z}{z}$	0,95885	0,99833	0,99958	0,99998	1	1
$\frac{\operatorname{tg} z}{z}$	1,09260	1,00335	1,00083	1,000003	1,000001	1

161. a) 1; b) 4; c) 3; d) 9; e) $-\pi$; f) 1; g) $-\sqrt{3}$; h) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

166. a) $-\sin x$; b) $5\cos 5x$; c) $-\frac{1}{\sin^2 x}$; d) $\frac{1}{\cos^2 x}$; e) $-\frac{1}{\sin^2 x}$; f) $-2\sin 2x$; g) $\frac{2}{\cos^2 2x}$; h) $2\cos 2x$; i) $\frac{2}{\cos^2 2x}$; j) $\frac{1}{\cos^2 2x}$.

168. a) $5\cos 5x$; b) $4\sin^3 x\cos x$; c) $2\sin 4x$; d) $-3\sin 6x$; e) $x^3(4\sin x+x\cos x)$; f) $\sin 2x+2x\cos 2x$; g) $\sin^2 x-x\sin 2x$; h) $2x(\cos 2x-x\sin 2x)$.

169. Tenkina.

170. a) $\operatorname{tg}^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$; b) $-\operatorname{ctg}^3 x\cdot\frac{1}{\sin^2 x}$; c) $\operatorname{tg} x+\frac{x}{\cos^2 x}$; d) $\frac{\sin^2 x+2x\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$; e) $\frac{-4\cos(2x)}{\sin^2(2x)}$; f) $\frac{4}{\sin^2(2x)}$.

171. a) $E(f')=[3;7]$; b) $E(f')=[-10;4]$; c) $E(f')=[-12;12]$; d) $E(f')=[-8;8]$.

172. $x=\pi k$, $x=\pi k-\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$, $k\in\boldsymbol{Z}$. **173.** $x=\pi(2k+1)$, $x=\frac{2\pi}{3}k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

176. a) 2; b) $\sin^2\alpha$. **177.** a) 45; b) 0; c) $-\pi$; d) $-\frac{3\pi}{2}$; e) 0; f) $-\frac{\pi}{2}$; g) $\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$; h) $1\frac{5}{6}$.

178. a) $y=\frac{3\sqrt{3}}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{4}\pi+\frac{3}{2}$; b) $y=2x-\frac{\pi}{2}+1$; c) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1$; d) $y=-x+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$; e) $y=4x+1-\frac{\pi}{2}$; f) $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\pi\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}-1$; g) $y=-\frac{4}{3}x+\frac{4\pi}{9}+\frac{\sqrt{3}}{3}$; h) $y=-\pi x+\frac{\pi}{2}$.

179. a) $\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $\frac{\pi}{6}(4k+3)$, $k\in\boldsymbol{Z}$; b) $\pi+2k\pi$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

180.

Funkcija	$\sin x$	$\sin 2x$	$\sin 3x$	$\sin 4x$	$\sin 5x$
Kampas	45°	63°26′	71°34′	75°58′	78°41′

181. a) $\frac{\pi}{3}$, kai $x = \frac{(2k+1)\pi}{3}$; $\frac{2\pi}{3}$, kai $x = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; b) $\frac{\pi}{6}$, kai $x = \frac{\pi}{6} + \frac{(2k+1)\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{6}$, kai $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$.

182. a) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$, $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; b) $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

183. a) $x = \frac{k\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; b) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, $x = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

184. a) $\pm\left(\pi - \arccos\frac{2}{3}\right) + 2k\pi$; b) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + k\pi$; c) $-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{3} + \frac{k\pi}{2}$; d) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{3}{5} + \frac{k\pi}{2}$; e) $x = (-1)^k\frac{\pi}{4} + k\pi$; f) $x = (-1)^k\frac{\pi}{3} + k\pi$.

186. a) $x = k\frac{\pi}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; b) $x = k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$; c) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \boldsymbol{Z}$ ir $x = 0$; d) $x = 0$.

187. $f\left(\arccos(-\frac{\sqrt{6}}{6})\right) = \frac{\sqrt{6}}{9}$ (max). **188.** $f\left(\arcsin(-\frac{\sqrt{6}}{6})\right) = -\frac{\sqrt{6}}{9}$ (min).

189. a) Mažėja $\left(2k\pi; \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right)$, $\left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$; didėja $\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $\left(\pi + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi; 2\pi + 2k\pi\right)$;
b) didėja $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi\right)$; mažėja $\left(-\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

190. a) $f\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi - \sqrt{3}$ (min), $f\left(-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi + \sqrt{3}$ (max);
b) $f\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi - \sqrt{3}$ (max), $f\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi - \sqrt{3}$ (min);
c) $f\left(\pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) = \frac{5}{4}$ (max), $f(2k\pi) = -1$ (min), $f(\pi + 2k\pi) = 1$ (max);
d) $f\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = f\left(\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) = \frac{5}{4}$ (max), $f\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$ (min), $f\left(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right) = -1$ (min);
e) $f\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = \frac{9\sqrt{3}}{2} + \pi - 12k\pi$ (max), $f\left(-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right) = -\frac{9\sqrt{3}}{2} + 5\pi - 12k\pi$ (min).

193. a) **B**; b) **D**; c) **A**; d) **C**. **194.** a) 2; b) $\frac{e}{2}$; c) 1; d) 1.

195. a) $-2e^{-2x}$; b) $-3^{1-x}\ln a$; c) $x^2e^{-x}(3-x)$; d) $2^{2x+1}(2x + (2x^2-1)\ln 2)$; e) $e^{2x}(\cos x + 2\sin x)$; f) $(2^x - 2^{-x})\cos x \cdot \ln x - (2^x + 2^{-x}) \cdot \sin x$; g) $\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$; h) $\frac{\ln 3}{2\sqrt{x-1}} \cdot 3^{\sqrt{x-1}}$.

196. a) **C**; b) **D**. **197.** a) $(-\ln 2; \ln 2)$; b) $(\ln 2; \ln 3)$.

198. a) Taip; b) ne; c) taip; d) taip.

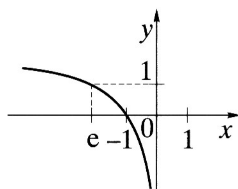
199. a) $\frac{1}{x}$; b) $\frac{2}{(2x-1)\ln 3}$; c) $\frac{2+3x}{x+x^2}$; d) $\frac{12}{(x-10)(x+2)\ln 10}$; e) $\frac{x}{x^2-1}$; f) $x(2\ln x + 1)$; g) $\cos x \cdot \ln^2 x + \frac{2}{x}\sin x \cdot \ln x$; h) $\frac{12\cos(4x)}{3\sin(4x)+4}$.

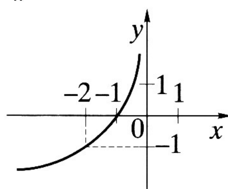
200. a) $e^{-x}(1-x)$; b) $\frac{xe^x}{(1+x)^2}$; c) $3^x\ln 3 + 4^x\ln 4$; d) $\frac{1}{2x\ln 5}$; e) $\ln x + 1$; f) $\frac{2\ln x}{x}$.

201. Tenkina. **202.** a) $-\frac{1}{3}$; b) 1,5; c) 1,2; d) 3.

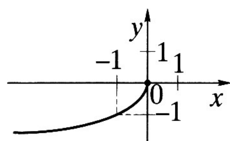
203. a) **B**; b) **B**. **204.** b) 2. **205.** a) $(3{,}5; +\infty)$; b) $(1; +\infty)$. **206.** a) Ne; b) taip.

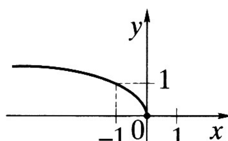
207. a) $D(f) = (-\infty; 0)$, $f'(x) = \frac{1}{x}$; b) $D(f) = (-\infty; 0)$, $f'(x) = \frac{-1}{x\ln 2}$.





208. a) $D(f) = (-\infty; 0]$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{-x}}$; b) $D(f) = (-\infty; 0]$, $f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt[4]{-x^3}}$.





209. a) $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$; b) $\frac{5x\sqrt{x}}{2}$; c) $\frac{7}{2}x^2\sqrt{x} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$; d) $\frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{2x})^2}$; e) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$; f) $\frac{1+2\sqrt{x}}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$; g) $\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$; h) $\frac{x}{1+x^2}$.

210. a) $\frac{1}{4}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{4}$; d) $\frac{1}{3}$. **211.** $\left[\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right]$. **212.** a) $\frac{2x}{\sqrt{x^4+1}}$; b) $\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

213. a) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; b) 0. **214.** a) $y = x + 1$; b) $y = 2e^2x - e^2$; c) $y = x - 1$; d) $y = 2x$.

215. a) $y = 2ex$; b) $y = ex$; c) $y = -x + \ln 4 - 2$; d) $y = \frac{3}{8}x + 2$.

216. a) $y = -2x + 2 - \ln 4$; b) $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. **217.** a) $a = e^2$; b) $a = -\frac{1}{e^2}$.

218. $\left(0; \frac{4}{27}\right)$, $\left(-\frac{2}{27}; 0\right)$. **219.** $y = x + 4$, $y = -x + 4$. **220.** $y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4}$.

221. $y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$. **222.** 1. $y = -2x + 10$; 2. $5\sqrt{5}$.

223. a) $(-\infty; -2)$ mažėja, $(-2; +\infty)$ didėja; b) $(-\infty; 3)$ mažėja, $(3; +\infty)$ didėja; c) $\left(-\infty; \frac{1}{5}\right)$ didėja, $\left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$ mažėja; d) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$ mažėja, $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$ didėja; e) $(-\infty; 0)$ ir $(2; +\infty)$ mažėja, $(0; 2)$ didėja; f) $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ir $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$ didėja, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ ir $\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ mažėja.

224. a) $\left(\log_2 \frac{3}{2}; +\infty\right)$ didėja, $\left(-\infty; \log_2 \frac{3}{2}\right)$ mažėja; b) $(-\infty; 2)$ mažėja, $(2; +\infty)$ didėja; c) $(2{,}5; +\infty)$ didėja, $(-\infty; 2{,}5)$ mažėja; d) $(4; +\infty)$ didėja, $(-\infty; 4)$ mažėja; e) $(-\infty; 0)$ didėja, $(0; +\infty)$ mažėja; f) $(-\infty; 1)$ didėja, $(1; +\infty)$ mažėja.

227. $a \in (-1; 1)$. **228.** $a \in (-\infty; -7) \cup (2; +\infty)$.

229. a) $(0; 1)$ didėja, $(1; +\infty)$ mažėja, $g(1) = -1$ (maksimumas); b) $(-\infty; 1)$ ir $(3; +\infty)$ didėja, $(1; 3)$ mažėja, $g(3) = 3 - 2\ln 2$ (minimumas); c) $(3; +\infty)$ didėja, $(0; 3)$ mažėja, $g(3) = 9 - 18\ln 3$ (minimumas); d) $(e^{-\frac{1}{3}}; +\infty)$ didėja; $(0; e^{-\frac{1}{3}})$ mažėja, $g(e^{-\frac{1}{3}}) = -\frac{1}{3e}$ (minimumas); e) $(-1; +\infty)$ didėja, $(-\infty; -1)$ mažėja, $g(-1) = 0$ (minimumas); f) $(-\infty; 2)$ didėja, $(2; +\infty)$ mažėja, $g(2) = 0$ (maksimumas).

230. $y = -1$. **231.** $y = 2$.

232. a) $-\frac{1}{2}$; 1; b) -1; 3; c) -2; -1; d) nėra; e) $0, \ln 2$; f) $-\ln a$, kai $a \in (0; +\infty)$.

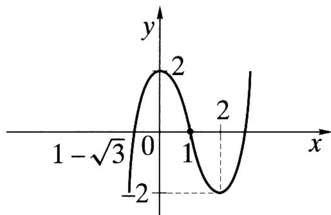
233. a) 2; b) e^3; c) -2; d) $2\pi n, n \in \boldsymbol{Z}$; e) $\frac{3}{4}\pi + 2\pi n$; f) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$.

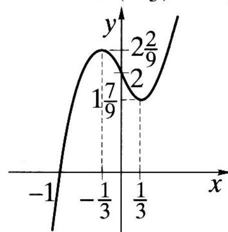
234. a) $x = 1$ maksimumo taškas; $x = e$ minimumo taškas; b) ekstremumų neturi.

235. Maksimumo taškas $x = n$, kai $n \in \boldsymbol{N}$. **236.** $a = 4$. **237.** $a = -3$.

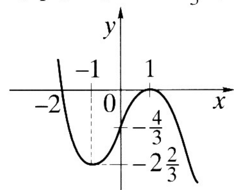
238. $a = \frac{1}{2}$. **239.** $a = -\frac{2}{3}$, $b = -\frac{1}{6}$.

243. a) $p(0) = 2(\max)$, $p(2) = -2(\min)$; b) $p\left(-\frac{1}{3}\right) = 2\frac{2}{9}$ (max), $p\left(\frac{1}{3}\right) = 1\frac{7}{9}$ (min);

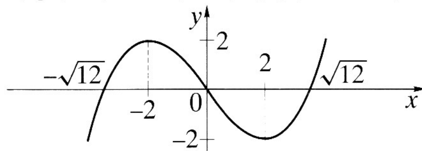




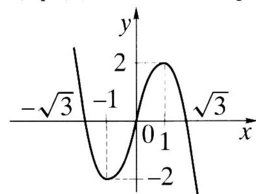
c) $p(-1) = -2\frac{2}{3}$ (min), $p(1) = 0$ (max);



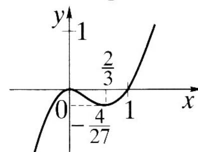
d) $p(-2) = 2$ (max), $p(2) = -2$ (min);



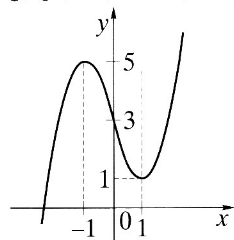
e) $p(1) = 2$ (max), $p(-1) = -2$ (min);



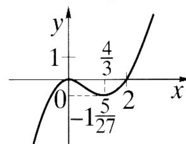
f) $p(0) = 0$ (max), $p\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{27}$ (min);



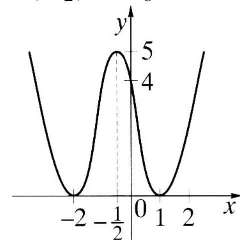
g) $p(-1) = 5$ (max), $p(1) = 1$ (min);



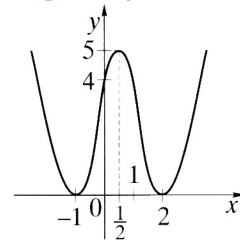
h) $p(0) = 0$ (max), $p\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{32}{27}$ (min).



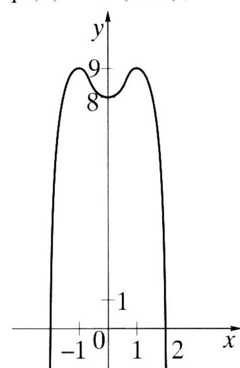
244. a) $p(-2) = p(1) = 0$ (min), $p\left(-\frac{1}{2}\right) = 5\frac{1}{6}$ (max);



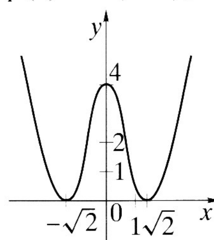
b) $p(-1) = p(2) = 0$ (min), $p\left(\frac{1}{2}\right) = 5\frac{1}{6}$ (max);



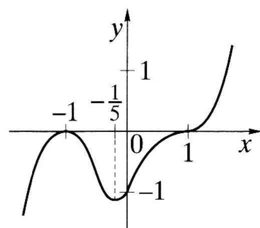
c) Funkcija lyginė;
$p(-1) = p(1) = 9$ (max),
$p(0) = 8$ (min);



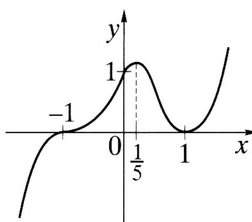
d) Funkcija lyginė;
$p(-\sqrt{2}) = p(\sqrt{2}) = 0$ (min),
$p(0) = 4$ (max);



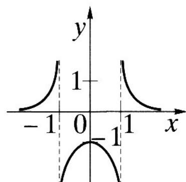
e) $p(-1) = 0$ (max),
$p\left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{3456}{3125}$ (min);
kritiniame taške $x = 0$ ekstremumo nėra;



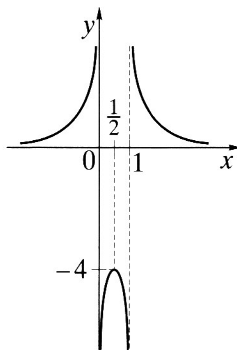
f) $p(1) = 0$ (min);
$p\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3456}{3125}$ (max),
kritiniame taške $x = -1$ ekstremumo nėra;



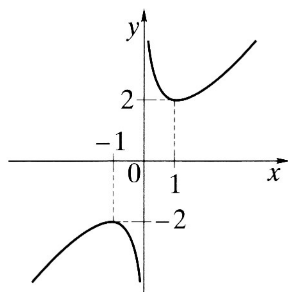
245. a) Funkcija lyginė; $f(0) = -1$ (max);



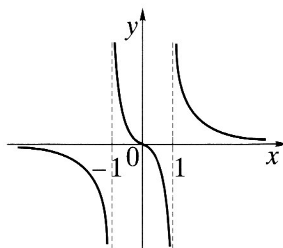
b) Funkcija lyginė; $f\left(\frac{1}{2}\right) = -4$ (max);



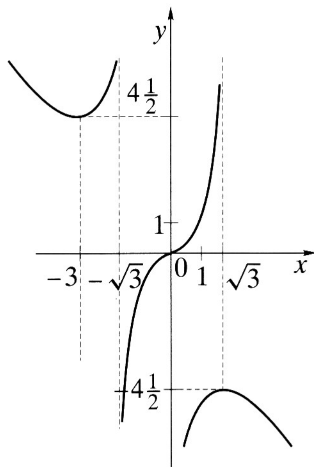
c) Funkcija nelyginė;
$f(1) = 2$ (max),



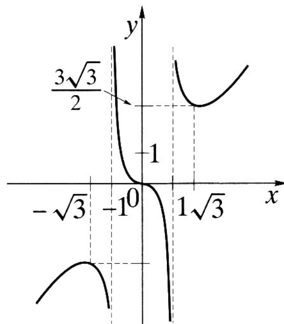
d) Funkcija nelyginė; ekstremumų nėra;
$f(-1) = -2$ (min);



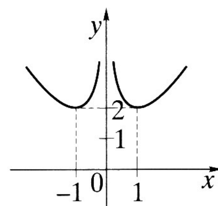
e) Funkcija nelyginė;
$f(-3) = \frac{9}{2}$ (min),
$f(3) = -\frac{9}{2}$ (max);
kritiniame taške $x = 0$ ekstremumo nėra;



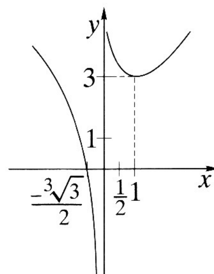
f) Funkcija nelyginė;
$f(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (max),
$f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (min);
kritiniame taške $x = 0$ ekstremumo nėra;



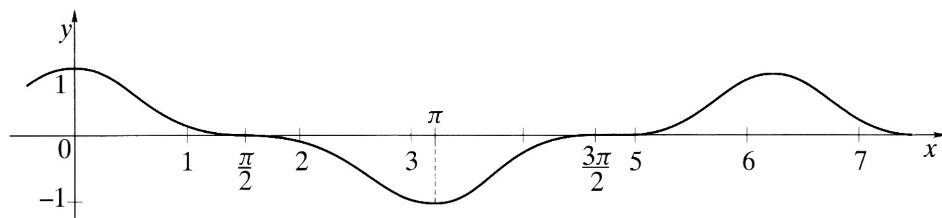
g) Funkcija lyginė;
$f(-1) = f(1) = 2$ (max);



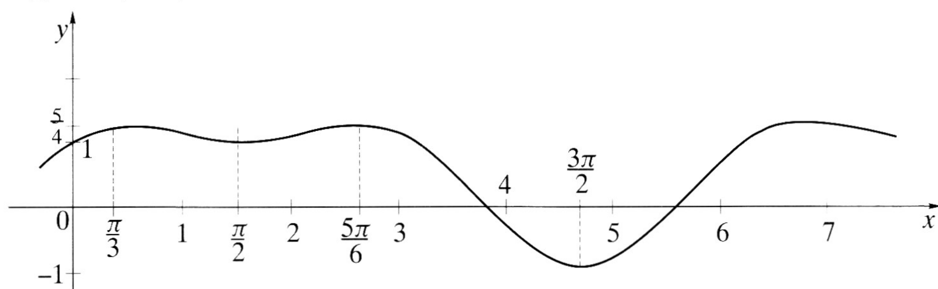
h) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$ (min).



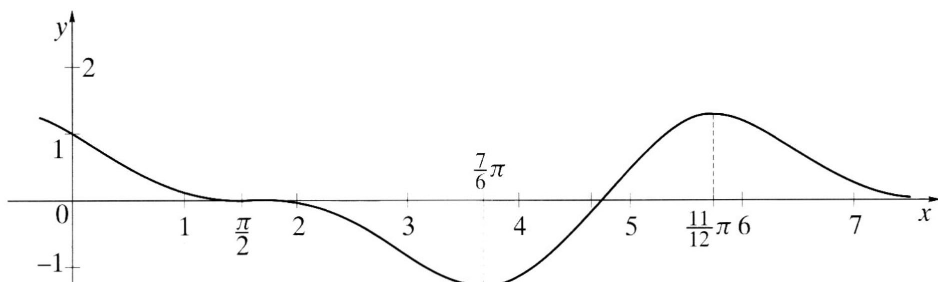
246. a) Funkcija nelyginė, $T = 2\pi$; $h(2k\pi) = 1$ (maksimumai), $h((2k+1)\pi) = -1$ (minimumai), $k \in \boldsymbol{Z}$; taškuose $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ekstremumų nėra.



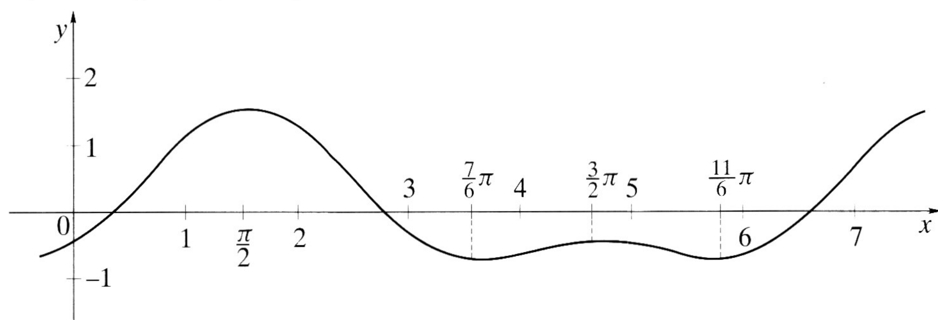
b) $T = 2\pi$; $h\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$ (minimumai), $h\left(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right) = -1$ (minimumai), $h\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = \frac{5}{4}$ (maksimumai);



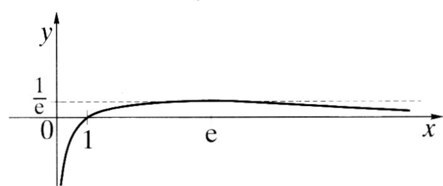
c) $T = 2\pi$; $h\left(-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ (maksimumai), $h\left(\frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$ (minimumai), $h\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 0$ (ekstremumų nėra);



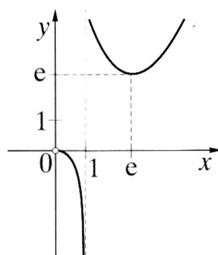
d) $T = 2\pi$; $h\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = \frac{3}{2}$ (maksimumai), $h\left(\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right) = -\frac{1}{2}$ (maksimumai), $h\left((-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + k\pi\right) = -\frac{3}{4}$ (minimumai).



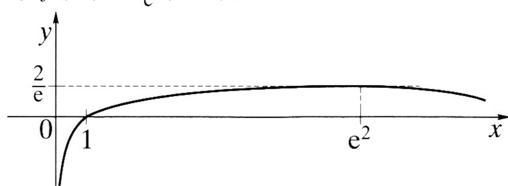
247. a) $f(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$ (max);



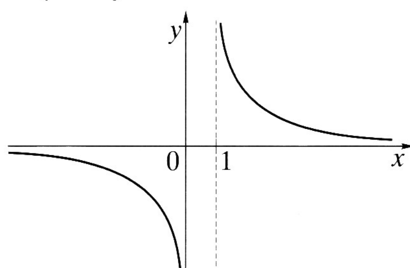
b) $f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$ (min);



c) $f(e^2) = \frac{2}{e}$ (max);



d) kritinių taškų nėra.



248. a) $\min\limits_{[-2;0]} f(x) = 4$, $\max\limits_{[-2;0]} f(x) = 16$; b) $\max\limits_{[0;4]} f(x) = 9$, $\min\limits_{[0;4]} f(x) = 0$;
c) $\min\limits_{[1;2]} f(x) = 1$, $\max\limits_{[1;2]} f(x) = 9$; d) $\min\limits_{[2;6]} f(x) = -10$, $\max\limits_{[2;6]} f(x) = -6$;
e) $\min\limits_{[-2;0]} f(x) = 7$, $\max\limits_{[-2;0]} f(x) = 9{,}25$; f) $\min\limits_{[-1;4]} f(x) = -1$, $\max\limits_{[-1;4]} f(x) = 15$;
g) $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = 4$, $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = 8$; h) $\min\limits_{[0;4]} f(x) = -1$, $\max\limits_{[0;4]} f(x) = 8$.

249. a) $\min\limits_{[0;1]} f(x) = \frac{3}{4}$, $\max\limits_{[0;1]} f(x) = 1$; b) $\min\limits_{[\frac{1}{2};2]} f(x) = \frac{3}{4}$, $\max\limits_{[\frac{1}{2};2]} f(x) = 3$;
c) $\min\limits_{[-1;3]} f(x) = \frac{3}{4}$, $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = 7$.

250. a) $\min\limits_{[2;5]} f(x) = 4$, $\max\limits_{[2;5]} f(x) = 67$; b) $\min\limits_{[-1;1]} f(x) = -13$, $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = 5$;
c) $\min\limits_{[-3;-1]} f(x) = 3$, $\max\limits_{[-3;-1]} f(x) = 7$, d) $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = -1$, $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = 3$;
e) $\min\limits_{[-1;1]} f(x) = -12$, $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = 2$; f) $\min\limits_{[-2;2]} f(x) = -24$, $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = 4$,
g) $\min\limits_{[-2;1]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = 17$; h) $\min\limits_{[0;2]} f(x) = -1$, $\max\limits_{[0;2]} f(x) = 8$;
i) $\min\limits_{[-2;2]} f(x) = 4$, $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = 13$, j) $\min\limits_{[-1;3]} f(x) = -25$, $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = 0$.

252. a) $\max f(x) = 6$; $x_1 = -\frac{3}{2}$; $x_2 = 1$; b) $\max f(x) = 5$; $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{2}{3}$.

253. Kai $a \in (-\infty; 1]$, $\min\limits_{[1;2]} f(x) = 1 - a$, $\max\limits_{[1;2]} f(x) = 2 - a$;
kai $1 < a \leqslant 1{,}5$, $\min\limits_{[1;2]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[1;2]} f(x) = 2 - a$;
kai $1{,}5 < a \leqslant 2$, $\min\limits_{[1;2]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[1;2]} f(x) = a - 1$;
kai $2 < a < +\infty$, $\min\limits_{[1;2]} f(x) = a - 2$, $\max\limits_{[1;2]} f(x) = a - 1$.

254. a) $\min\limits_{[-3;-1]} f(x) = 2$, $\max\limits_{[-3;-1]} f(x) = 10$; b) $\min\limits_{[1;4]} f(x) = -2$, $\max\limits_{[1;4]} f(x) = 2$;
c) $\min\limits_{[-1;3]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = 4$; d) $\min\limits_{[-2;3]} f(x) = -2$, $\max\limits_{[-2;3]} f(x) = 20$.

256. $\min\limits_{D(f)} f(x) = -9$, $\max\limits_{D(f)} f(x) = 16$. **257.** $x_4 = -112$.

258. a) $\min\limits_{[0;2]} f(x) = -3$, $\max\limits_{[0;2]} f(x) = -\frac{1}{3}$; b) $\min\limits_{[-1;1]} f(x) = -3$, $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = \frac{1}{3}$;
c) $\min\limits_{[1;6]} f(x) = 1$, $\max\limits_{[1;6]} f(x) = 2\frac{1}{8}$, d) $\min\limits_{[-4;0]} f(x) = -\frac{1}{4}$, $\max\limits_{[-4;0]} f(x) = 0$;
e) $\min\limits_{[0;1]} f(x) = \frac{3}{5}$, $\max\limits_{[0;1]} f(x) = 1$; f) $\min\limits_{[-1;1]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

259. a) $\max\limits_{[0;5]} f(x) = 1$; b) $\min\limits_{[-1;3]} f(x) = -9\frac{1}{3}$. **260.** $\min x_n = -\frac{11}{8}$, $\max x_n = \frac{12}{1135}$.

262. a) $E(f) = \left[-\frac{1}{2}; 2\frac{1}{2}\right]$; b) $E(f) = \left[0; \frac{4}{3}\right]$.

263. a) $\min\limits_{[0;4]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[0;4]} f(x) = 8$; b) $\min\limits_{[0;4]} f(x) = -1$, $\max\limits_{[0;4]} f(x) = 0$;
c) $\min\limits_{[-4;3]} f(x) = 3$, $\max\limits_{[-4;3]} f(x) = 5$; d) $\min\limits_{[0;3]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[0;3]} f(x) = \sqrt[3]{9}$.
264. a) $D(f) = [2; 5]$, $\min\limits_{D(f)} f(x) = \sqrt{3}$, $\max\limits_{D(f)} f(x) = 3$;
b) $D(f) = [1; 3]$, $\min\limits_{D(f)} f(x) = \sqrt{2}$, $\max\limits_{D(f)} f(x) = 2$.
265. a) $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = -1 - \frac{\pi}{2}$, $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$;
b) $\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = -\pi$, $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]} f(x) = \pi$;
c) $\min\limits_{[0;\pi]} f(x) = 1$, $\max\limits_{[0;\pi]} f(x) = 2\pi + 1$; d) $\min\limits_{[0;\pi]} f(x) = -1$, $\max\limits_{[0;\pi]} f(x) = 1$.
266. a) $\min\limits_{\boldsymbol{R}} f(x) = -19$, $\max\limits_{\boldsymbol{R}} f(x) = 21$; b) $\min\limits_{\boldsymbol{R}} f(x) = \frac{4}{8+\sqrt{2}}$, $\max\limits_{\boldsymbol{R}} f(x) = \frac{4}{8-\sqrt{2}}$.
268. a) $\min\limits_{[-4;4]} f(x) = -3e^2$, $\max\limits_{[-4;4]} f(x) = 7e^4$; b) $\min\limits_{[-1;2]} f(x) = \frac{2}{\ln 2}$, $\max\limits_{[-1;2]} f(x) = \frac{17}{4\ln 2}$;
c) $\min\limits_{[-1;1]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = 12$; d) $\min\limits_{[-1;1]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = 24$;
e) $\min\limits_{[\frac{1}{2};e]} f(x) = 1$, $\max\limits_{[\frac{1}{2};e]} f(x) = e - 1$; f) $\min\limits_{[\frac{1}{2};4]} f(x) = 0$, $\max\limits_{[\frac{1}{2};4]} f(x) = 21 + 3\ln 2$.
269. $x = 0$. **270.** $\max\limits_{[2;8]} f(x) = \frac{14}{5}$. **271.** $a = 3$. **272.** $a = 4$. **273.** $(1; 1)$.
274. $3 = 2 + 1$. **275.** $5 = 3\frac{3}{4} + 1\frac{1}{4}$. **276.** $3 + 2\sqrt{2}$. **277.** 8.
278. $\left(\frac{-1-\sqrt{3}}{2}; \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$. **279.** 11,5. **280.** $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **281.** $\frac{2\sqrt{3}}{9}ah$.
282. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. **283.** $4{,}5\,\text{cm}^2$. **284.** Trečiosios kraštinės viduryje.
285. $2(\sqrt{2} - 1)$. **286.** 15 cm. **287.** $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$. **288.** $100\sqrt[3]{45\pi}$.
289. $\frac{2\sqrt{2}R}{3}$. **290.** 3 h 44 min. **291.** Po $5\frac{4}{7}$ min. **292.** 1) $625\,\text{m}^2$; 2) $16\frac{2}{3}\%$; 3) $38\frac{8}{9}$.
293. a) $4050\,\text{cm}^2$; b) $4800\,\text{cm}^2$. **294.** $C\left(1\frac{3}{4}; \frac{5}{6}\right)$. **295.** a) $B\left(4 + \frac{3}{2}a; -\frac{3}{4}a\right)$; b) 4.

2 SKYRIUS

1. a) $f(x) = 12x^2 - 6x$; b) $f(x) = 20x^3 + 2$; c) $f(x) = 30x^4 + 15x^2$;
d) $f(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}} - 4x^{-\frac{1}{3}}$; e) $f(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{\sqrt{x+2}}$; f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{2x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$;
g) $f(x) = (1 + 2x)e^{2x} - 3e^{-3x}$; h) $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)\cdot\ln 2}$.
3. $f(x) = -2\sqrt{-x} + 2x + 12$, $F(-4) = 0$.
4. a) $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 - x + C$; b) $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 2x + C$;
c) $F(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + 2x + C$; d) $F(x) = \frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{12}{7}x^{\frac{7}{4}} + 4x + C$;
e) $F(x) = 2\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x} + C$; f) $F(x) = \frac{2}{9}(3x - 1)^{\frac{3}{2}} - 3\sin\frac{x}{3} + C$;
g) $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x - 3) + \frac{x^3}{3} + C$; h) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x-3} + \frac{1}{3}\sin(3x + 1) + C$.
5. a) $F(x) = 2x^2 - 3x + 4$; b) $F(x) = -x^2 + x + 2$; c) $F(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x + 3$;
d) $F(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$.
6. a) $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2$; b) $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2$; c) $F(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 + 1$;
d) $F(x) = \frac{x^2}{2} - x^3 + 2$.

7. a) $y = \ln|x| + 2$; b) $y = -2\sqrt{x} + 4$; c) $y = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + 1\frac{2}{5}$; d) $y = \frac{-2}{\sqrt{x}} + 4$.

8. a) Taip; b) taip; c) ne; d) ne.

9. b) $F(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x$; c) $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$.

13. a) $x^2 + \frac{3}{4}x^4 + C$; b) $x^4 + x^6 + C$; c) $x^3 - \frac{x^7}{7} + C$; d) $\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^4 + \frac{9}{5}x^5 + C$; e) $-\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} + C$; f) $-\frac{1}{x^2} + 3\ln|x| + C$; g) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + \frac{6}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$; h) $4\ln|x| + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C$.

14. a) $\frac{1}{27}(3x-4)^9 + C$; b) $\frac{1}{16}(2x+7)^8 + C$; c) $\frac{2}{15}(5x-3)^{\frac{3}{2}} + C$; d) $-\frac{1}{4}(4-3x)^{\frac{4}{3}} + C$; e) $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x-3} + C$; f) $\frac{1}{3\ln 2} \cdot 2^{3x-1} + C$; g) $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x + 4) + C$; h) $3\sin\left(\frac{x}{3} - 2\right) + C$.

15. a) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$; b) $-\cos x + C$; c) $\operatorname{tg} x - x + C$; d) $-\operatorname{ctg} x - x + C$; e) $-2\cos x + C$; f) $2\sin x + C$.

16. a) $2x^2 + 4x + \ln|x| + C$; b) $\frac{x^2}{2} - 6x + 12\ln|x| + \frac{8}{x} + C$; c) $x + \ln|x+1| + C$; d) $2x + \ln|x-1| + C$; e) $\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x + 2x^{\frac{1}{2}} + C$; f) $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - \frac{12}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$.

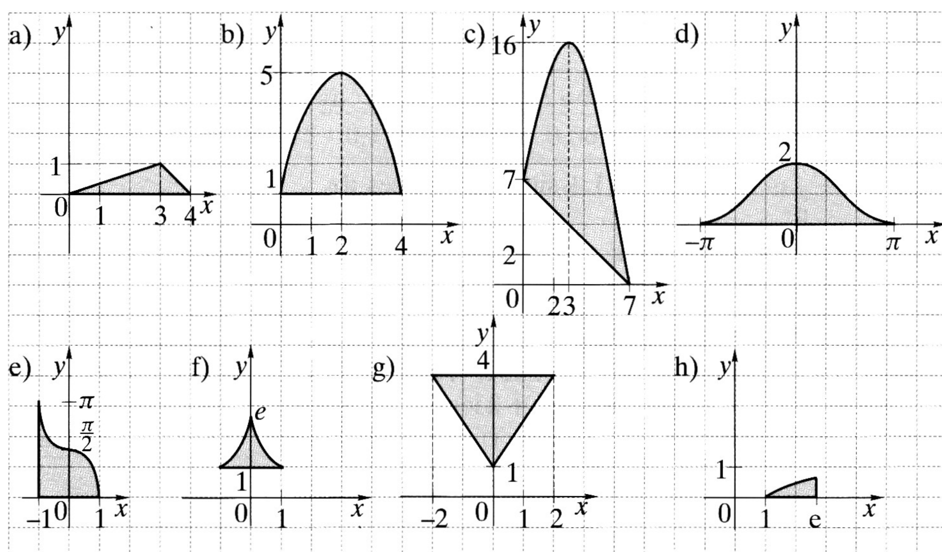
17. a) $\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x} - \mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{-8x} + C$; b) $-\frac{1}{\ln 3}\left(3^{-x} + \frac{2}{3}\cdot 3^{-3x} + \frac{1}{5}\cdot 3^{-5x}\right) + C$.

18. a) $\sin x + \cos x + C$; b) $\sin x - \cos x + C$; c) $-\frac{1}{2}\cos 2x + C$; d) $2\operatorname{tg}\frac{x}{2} - x + C$;

19. 48 m. **20.** $42\frac{2}{3}$ m. **21.** 1) $\frac{20}{3}$ m/s^2; 3) $2\frac{2}{3}$ km.

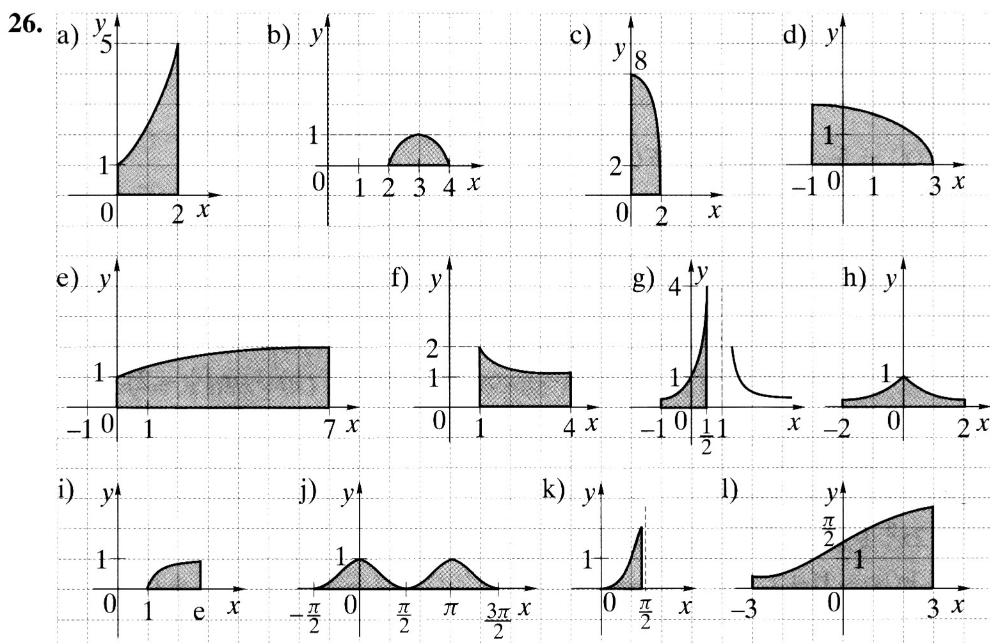
22. 1) $v(t) = 1 + t - \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi t)$; 2) $s(t) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4\pi^2}\cos(2\pi t)$.

23.



24. a) $3\frac{3}{4}$; b) 9; c) 2; d) -6; e) $1\frac{1}{3}$; f) $3\frac{1}{3}$. **25.** 2) a) $3\frac{1}{2}$; b) 16.

26.



27. a) $\frac{1}{5}$; b) $11\frac{1}{4}$; c) $\frac{9}{10}$; d) $\frac{2}{\ln 3}$; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{1}{2}$.

28. a) $1\frac{2}{3}$; b) 4; c) $\frac{5}{9}$; d) $1\frac{15}{16}$; e) $2\sqrt{2}$; f) $4\frac{1}{2}$; g) $\frac{3}{8}$; h) $\frac{4}{7}$; i) $\frac{1}{2}$; j) $2\frac{2}{3}$; k) $\frac{45}{32}$; l) $3\frac{1}{9}$.

29. a) 6; b) $\frac{23}{12}$; c) $-\frac{33}{4}$; d) $\frac{25}{6}$. **30.** a)–d) — teisinga.

31. a) $-\frac{121}{12}+3\cdot 2^{\frac{2}{3}}$; b) $\frac{37}{6}-6\cdot 2^{\frac{2}{3}}$; c) $\frac{\pi+2}{2}$; d) $\frac{\pi-2}{4}$; e) $1-\frac{\pi}{4}$; f) $\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}$; g) 1; h) 1; i) $1-\frac{e^2}{2}$; j) $\frac{3}{2}-\frac{e^{-2}}{2}$.

32. a) $18\frac{2}{7}$; b) $\frac{1}{6}$; c) $32\frac{2}{3}$; d) $1\frac{5}{9}$; e) 2; f) 2; g) $\frac{3}{4}$; h) $\frac{1}{6}(\sqrt{3}-1)$.

33. a) $1\frac{1}{3}$; b) $10\frac{2}{3}$; c) $5\frac{1}{3}$; d) $5\frac{1}{3}$; e) $1\frac{1}{3}$; f) $4\frac{1}{2}$; g) 4; h) 4.

34. a) $\frac{\pi}{2}$; b) π; c) $\frac{\pi}{2}$; d) $\frac{\pi}{2}$; e) $\frac{\pi a^2}{2}$; f) $\frac{\pi a^2}{2}$.

35. a) $\int\limits_{-2}^{2}\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right)dx+\int\limits_{2}^{2\frac{4}{5}}\left(-\frac{5}{4}x+3\frac{1}{2}\right)dx$; b) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{2}x^2\,dx+\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)dx$;

c) $\int\limits_{-1}^{0}e^x\,dx+\int\limits_{0}^{2}e^{-2x}\,dx$; d) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(1+\sin x)\,dx+\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos\,dx$.

36. a) 13,5; b) $7\frac{1}{3}$; c) 12; d) 6; e) $3\frac{3}{4}$; f) $1\frac{2}{3}$. **37.** 2π. **38.** $2+\pi$.

40. $\frac{\pi^2}{4}-2$. **41.** $\frac{\pi^2}{2}-2$. **42.** $\frac{\pi^2}{2}+2$. **43.** a) 8π; b) 4π.

45. a) $2\frac{2}{3}$; b) 9. **46.** a) $20\frac{5}{6}$; b) $85\frac{1}{3}$; c) $20\frac{5}{6}$; d) $21\frac{1}{3}$; e) 72; f) $170\frac{2}{3}$; g) $85\frac{1}{3}$; h) $85\frac{1}{3}$.

47. 3) a) $10\frac{2}{3}$; b) 10; c) $4\frac{1}{2}$; d) $14\frac{2}{3}$; e) 32; f) 8; g) 16; h) $\frac{4}{3}$. **48.** 3 : 1. **49.** 3 : 1.

50. $2+\log_2 e$; $2{,}5-\log_2 e$. **51.** $4{,}5+2\log_3 e$; $3{,}5-2\log_3 e$.

52. a) 27; b) $163\frac{1}{3}$; c) 12; d) $77\frac{1}{3}$; e) $\frac{1}{6}$; f) $1\frac{1}{3}$; g) 18; h) $66\frac{2}{3}$. **53.** $a=-\frac{2}{\pi}$, $b=2$.

54. $a=2$, $b=\frac{3}{2\pi}$. **55.** $a=\frac{2}{\ln 3}$, $b=12-\frac{12}{\ln^2 3}$.

56. $a=\frac{1}{\ln 2}$, $b=\frac{7}{3}\left(1-\frac{1}{\ln^2 2}\right)$. **57.** $a=3$. **58.** $x\in[-2;2]$.

59. $a=20\,\mathrm{m/s^2}$. **60.** $t=8\,\mathrm{s}$. **61.** $s=32\,\mathrm{m}$.

62. a) $\frac{16\pi}{15}$; b) 64π; c) $\frac{21\pi}{64}$; d) $\frac{4\pi^2+3\sqrt{3}\pi}{12}$; e) π; f) $\pi\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)$; g) $\pi\left(\frac{9\pi}{4}+2\right)$; h) $\pi\ln 3$.

63. a) $\frac{11\pi}{30}$; b) $\frac{21}{4}\pi^2 + 4\pi$.
64. $a = 4\sqrt{2}$. **65.** $r = \sqrt{30}$. **68.** $\frac{l^2}{6}$.
70. I. a) $\frac{400\sqrt{3}}{9}$; b) $\frac{6-2\sqrt{3}}{9} \cdot 100\% \approx 28{,}18\%$; II. a) $\frac{800}{27} = 29\frac{26}{27}$; b) $18\frac{14}{27}\%$.
71. 0,08 J. **72.** $4{,}5 \cdot 10^{-15}$ J.

3 SKYRIUS

1. $p \approx 0{,}617$. **2.** $\frac{1}{220}$. **3.** $\frac{2}{3}$. **4.** $\frac{2}{5}$. **5.** $\frac{C_{48}^{24} \cdot C_4^2}{C_{52}^{26}} = \frac{325}{833}$.
6. $p = 0{,}125$. **7.** a) $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{216}$; b) $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{36}$; c) $\mathbf{P}(C) = \frac{5}{54}$.
8. $\frac{3^5 \cdot 5! \cdot 10!}{15!} = \frac{81}{1001}$. **9.** $\frac{2^{10}(10!)^2}{20!} = \frac{256}{46\,189}$. **12.** $\frac{2}{3}$.
13. $n = 1$: a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{2}{9}$; c) $\frac{4}{9}$; $n = 2$: a) $\frac{13}{27}$; b) $\frac{26}{81}$; c) $\frac{16}{81}$; $n = 3$: a) $\frac{133}{243}$; b) $\frac{266}{729}$; c) $\frac{64}{729}$.
14. $\mathbf{P}_T = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{3}{5}$; $\mathbf{P}_P = \frac{2}{5}$. **16.** 1) $5\frac{5}{9}$; 2) $\frac{5}{9}$; 3) a) $\frac{2}{9}$; b) $\frac{8}{9}$.
17. $\frac{2}{3}$. **18.** $p = \frac{1}{2}$; $\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \frac{3}{4}$. **19.** $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$. **20.** b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
21. $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0{,}826$. **22.** $\frac{(a-2r)^2}{\pi R^2} \approx 0{,}051$.

30.

$m =$	0	2
$\mathbf{P}(X = m) =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

31.

$m =$	0	3	4
$\mathbf{P}(X = m) =$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$

32.

$m =$	0	1	2	3	4
$\mathbf{P}(X = m) =$	$\frac{256}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{1}{625}$

33. $\approx 0{,}0547$. **34.** $P_4(m \geqslant 3) < P_6(m \geqslant 4)$. **35.** a) 7; b) 9; c) 13. **36.** 0,6.

37.

$m =$	1	2	3	4
$\mathbf{P}(X = m) =$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5^2}$	$\frac{4^2}{5^3}$	$\frac{4^3}{5^3}$

38.

$m =$	0	1	2	3	4
$\mathbf{P}(X = m) =$	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,0625

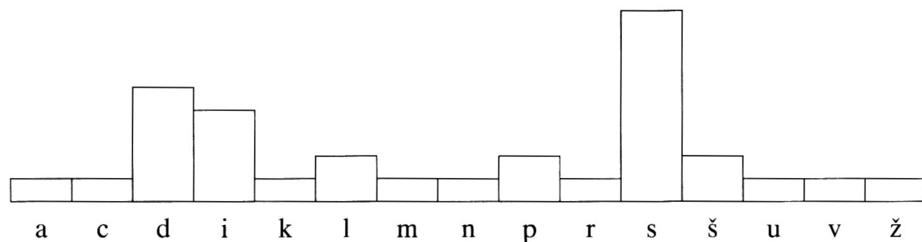
4 SKYRIUS

1. Dažnių lentelė

Raidės	a	c	d	i	k	l	m
Dažniai	1	1	5	4	1	2	1
Santykiniai dažniai	0,03125	0,03125	0,15625	0,125	0,03125	0,0625	0,03125

Raidės	n	p	r	s	š	u	v	ž
Dažniai	1	2	1	8	2	1	1	1
Santykiniai dažniai	0,03125	0,0625	0,03125	0,250	0,0625	0,03125	0,03125	0,03125

Santykinių dažnių stulpelinė diagrama



Skritulinės diagramos sektorių centriniai kampai (laipsniais)

Raidės	a	c	d	i	k	l	m
Kampai	11,25	11,25	56,25	45	11,25	22,5	11,25

Raidės	n	p	r	s	š	u	v	ž
Kampai	11,25	22,5	11,25	90	22,5	11,25	11,25	11,25

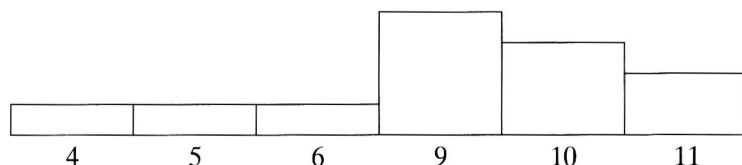
Raidė s yra imties moda.

2. Žodžių skaičių eilutėse dažniai

Žodžių skaičius	4	5	6	9	10	11
Dažnis	1	1	1	4	3	2
Santykinis dažnis	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

Imties moda yra 9.

Stulpelinė santykinių dažnių diagrama



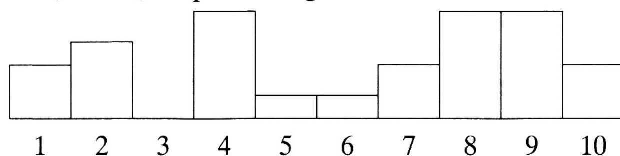
Skritulinės diagramos sektorių centriniai kampai (laipsniais)

Žodžių skaičius	4	5	6	9	10	11
Kampai	30	30	30	120	90	60

3. Pelnytų taškų dažniai

Taškai	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Dažniai	2	3	0	4	1	1	2	4	4	2
Santykiniai dažniai	$\frac{2}{23}$	$\frac{3}{23}$	0	$\frac{4}{23}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{2}{23}$	$\frac{4}{23}$	$\frac{4}{23}$	$\frac{2}{23}$

Santykinių dažnių stulpelinė diagrama



Imties modos yra 4, 8 ir 9.

Skritulinės diagramos sektorių centriniai kampai (laipsniais, suapvalinta)

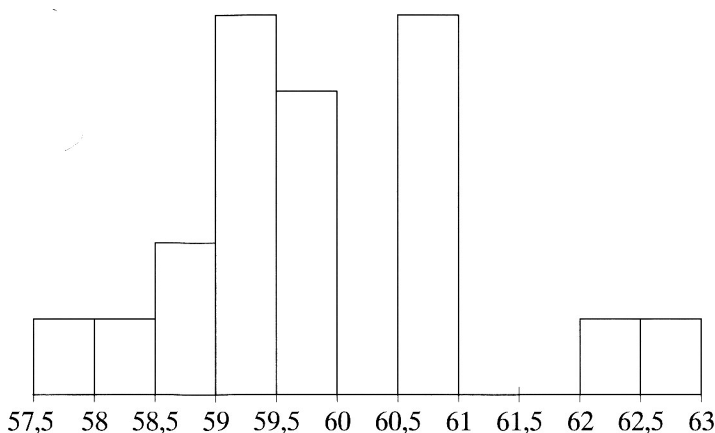
Taškai	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Kampai	31,30	46,96	0	62,61	15,65	15,65	31,30	62,61	62,61	31,30

4. Sugrupuotos imties dažniai

Intervalai	[57,5; 58)	[58; 58,5)	[58,5; 59)	[59; 59,5)	[59,5; 60)
Dažniai	1	1	2	5	4
Santykiniai dažniai	0,05	0,05	0,10	0,25	0,20

Intervalai	[60; 60,5)	[60,5; 61)	[61; 61,5)	[61,5; 62)	[62; 62,5)	[62,5; 63)
Dažniai	0	5	0	0	1	1
Santykiniai dažniai	0	0,25	0	0	0,05	0,05

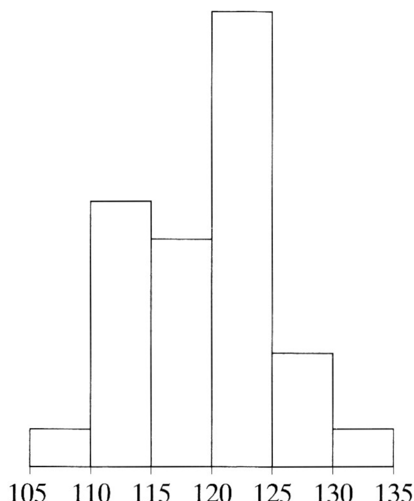
Sugrupuotos imties histograma



5. Sugrupuotos imties dažniai

Intervalai	[105; 110)	[110; 115)	[115; 120)	[120; 125)	[125; 130)	[130; 135)
Dažniai	1	7	6	12	3	1
Santykiniai dažniai	0,033	0,233	0,2	0,4	0,1	0,033

Sugrupuotos imties histograma

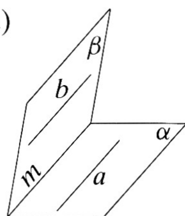


6. Imties kvartiliai: $Q_1 = 65$, $Q_2 = 74$, $Q_3 = 95$. Imties vidurkis $\approx 87{,}4$.
7. a) $Q_1 = 3$; b) 8; c) 1. **8.** 6.
9. Imties moda 6; $Q_1 = 6$; $Q_2 = 8$; $Q_3 = 10$; vidurkis $\frac{127}{16} = 7{,}875$; dispersija $\frac{2415}{248} \approx 9{,}1452$.
10. $-\frac{1}{7}$. **11.** $\frac{91}{16}$. **12.** 6,6. **13.** 4; $\frac{37}{24}$.
14. $Q_1 = 10$; $Q_2 = 11$; $Q_3 = 12$; atmetus blogiausiąjį rezultatą (9 ir 9) $Q_1 = 10{,}5$; $Q_2 = 11{,}5$; $Q_3 = 12{,}5$; atmetus geriausiąjį rezultatą (14) $Q_1 = 10$; $Q_2 = 10$; $Q_3 = 12$.
15. Matematinių ženklų skaičiaus vidurkis $\approx 18{,}833$, dispersija $\approx 52{,}968$ (skyrybos ženklai neskaičiuoti). Raidžių skaičiaus vidurkis 14, dispersija 35,6. Koreliacijos koeficientas $\approx -0{,}281$.
16. Balsių skaičiaus vidurkis $\approx 3{,}44$, dispersija $\approx 4{,}01$. Priebalsių skaičiaus vidurkis $\approx 3{,}18$, dispersija $\approx 3{,}42$. Koreliacijos koeficientas $\approx 0{,}85$.
17. Matematikos ir fizikos pažymių koreliacijos koeficientas $\approx 0{,}798$; matematikos ir istorijos pažymių koreliacijos koeficientas $\approx 0{,}478$.
18. Koreliacijos koeficientas $\approx 0{,}818$.
19. Koreliacijos koeficientas $\approx -0{,}717$.
20. Koreliacijos koeficientas $\approx 0{,}705$.

5 SKYRIUS

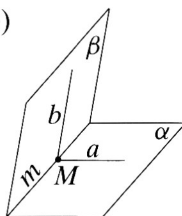
1. AB ir BC; BD ir AD — susikertančios; AB ir CD; BC ir AD — prasilenkiančios.
2. 28. **3.** a) AA_1, DD_1, A_1B_1, D_1C_1, b) D_1C_1.
4. BB_1, DD_1, BC, A_1D_1, BD, B_1D_1. **5.** 1, 4 arba 6.
6. Tiesės AB ir CD yra vienoje plokštumoje, todėl:
a) tiesės AC ir BD negali būti prasilenkiančios; b) tiesės AC ir BD gali kirstis.
7. Kadangi tiesės MN ir KL yra prasilenkiančios, tai visi 4 taškai M, N, K, L negali būti vienoje plokštumoje, todėl:
a) tiesės MK ir NL negali būti lygiagrečios; b) tiesės MK ir NL negali kirstis.
8. Lygiagrečios arba prasilenkiančios.

14. Tiesės AB ir A_1B_1 yra vienoje plokštumoje, todėl jos yra lygiagrečios arba susikertančios.
15. Gali.
16. Tiesės m ir AD prasilenkiančios pagal prasilenkiančių tiesių požymį.
18. Kėdutės kojos yra nevienodo ilgio.
21. Arba lygiagrečios, arba prasilenkiančios.
22. Kai trikampio ABC pusiaukraštinė AD yra ir jo aukštinė, t. y., kai $AB = BC$.
23. Į lygiašonio trikampio pagrindą AC nubrėžta pusiaukraštinė BM yra trikampio ABC pusiaukampinė ir aukštinė. Pusiaukampinių susikirtimo taškas $O \in OM$, į trikampį įbrėžto apskritimo spindulys OM. Per susikertančias tieses BK ir BM galima nubraižyti ploktšumą.
24. Stačiakampio visos keturios viršūnės A, B, C, D yra vienoje plokštumoje, o įstrižainių AC ir BD susikirtimo taškas yra apie tą stačiakampį apibrėžto apskritimo centras O. Taškas O priklauso AC, o per dvi susikertančias tieses AC ir AE galima nubraižyti plokštumą.
25. Apskritimas priklausys plokštumai α tik tada, kai jo ribojamo skritulio dar bent vienas taškas priklausys tai plokštumai.
26. a) 45°; b) 65°. **27.** a) 20°; b) 67°. **28.** a) 70°; b) 60°.
32. a)



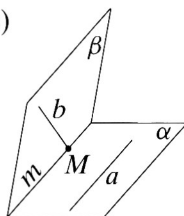
$a \parallel m \parallel b$

b)



$a \cap b = M$

c)



$a \parallel m,\ b \cap m = M,\ a \dot{-} b$

33. a) $AD = a$; b) $AM = \frac{a\sqrt{6}}{2}$, čia AM — lygiakraščio trikampio AB_1D_1 aukšinė; c) $AN = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, čia AN — stataus trikampio DAB_1 aukštinė.
36. Jei trapecijos pagrindai nėra plokštumoje α, tai jie lygiagretūs tai plokštumai. Remiamės tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymiu. Jei plokštuma α, sutampa su trapecijos plokštuma, tai jos pagrindai yra plokštumoje α.
39. $FE \parallel AB \parallel DC$, $FE \neq DC$, todėl keturkampis $CDFE$ yra trapecija.
40. $\sqrt{6}\,m$. **41.** a) 4 dm; b) $1{,}5a + 2$. **42.** a) 40,5 mm; b) $2{,}25\,a$.
43. a) 31,2 m; b) 1,725 dm.
44. b) 7,1 cm; c) taip. Remiamės tiesės ir plokštumos lygiagretumo požymiu; d) trikampio plotas 42,6 cm^2, trapecijos plotas 68,4 cm^2.
45. 8 cm. **46.** 15 cm. **47.** $10\sqrt{2}$ cm. **48.** 13 dm.
50. a) $5\sqrt{13}$ cm; b) $\frac{5\sqrt{13}}{2}$ cm. **51.** 2 cm. **52.** 14 dm ir 5 dm.
53. $\sqrt{37}$ cm. **54.** 60 cm. **55.** $MO = a\sin\alpha$. **56.** $OM = b\cos\beta$.
57. $2\sqrt{3}$ cm. **58.** $MB = 8{,}5$ cm. **59.** 5 cm; 10 cm; $5\sqrt{13}$ cm. **60.** 9 m.
61. Statusis ($\angle ONL = 90°$). **62.** 7,5 cm ir 0,5 cm. **63.** 13,5 mm ir 14,5 mm.
64. 4 m. **65.** $2\sqrt{3}$ cm ir 2 cm. **66.** a) 8 cm ir 16 cm; b) $2\sqrt{15}$ cm.
67. a) 45° ir 30°; b) $2\sqrt{34}$ cm; c) 90° (duota).
68. a) $6\sqrt{3}$ cm; b) 24 cm; c) $12\sqrt{3}$ cm, 18 cm. **69.** 24 cm.
70. $MB = MD = \sqrt{674}$ cm; $MC = \sqrt{949}$ cm. **71.** a) $8\sqrt{3}$ cm; b) $4\sqrt{3}$ cm; c) 60°.
72. a) 12; b) $3\sqrt{3}$; c) 4,5. **73.** a) Gali; b) negali; c) gali.

74. a) Be galo daug tiesių, kurių kiekviena eina per statmens, nubrėžto per tašką M plokštumai β, pagrindą.
b) Be galo daug tiesių, kurių kiekviena liečia tą patį apskritimą, kurio centras — statmens, nubrėžto per tašką M plokštumai β, pagrindas O, o spindulys lygus ON.
75. 13 cm arba $\sqrt{769}$ cm. **76.** 30°. **77.** 5 cm, 5 cm.
78. $\frac{6}{7}$. **79.** c) 33,75 cm. **80.** 4,5 dm. **81.** $A_2K = 5$ cm; $B_2K = 40$ cm.
82. $A_1O = 28$ dm; $A_2O = 35$ dm. **83.** $\frac{21\sqrt{2}}{2}$ cm. **84.** $AA_1 = 5\sqrt{3}$ cm; $BB_1 = 5$ cm.
85. a) $2a$; b) $\frac{2\sqrt{3}a}{3}$. **86.** 9 cm, 5 cm; 12 cm. **87.** a) A, D, E; b) D; c) E; d) B, E.
88. a) C; b) B, C; c) D. **89.** $B(4; 0; 4)$, $A_1(0; 4; 4)$, $B_1(4; 4; 4)$, $C_1(4; 4; 0)$.
90. Iš taško A į koordinačių ašis išvestų statmenų pagrindų koordinatės yra (2; 0; 0), (0; 3; 0), (0; 0; 5).
91. Iš taško M į koordinačių plokštumas išvestų statmenų pagrindų koordinatės yra (1; 2; 0), (1; 0; 3), (0; 2; 3).
92. (1; 2; −3), (1; −2; 3), (−1; 2; 3).
93. *Nurodymas.* Apskaičiuokite įstrižainių AC ir BD vidurio taškų koordinates.
94. $\left(\frac{3}{4}; 0; 0\right)$. **95.** $M(-4; -1; 0)$.
96. Taškui A simetriškų taškų koordinatės: a) (3; −2; −5); b) (−3; −2; −5), (3; 2; −5), (3; −2; 5); c) (−3; 2; −5), (3; 2; 5), (−3; −2; 5).
97. a) $\overrightarrow{A_1B_1}$ ir $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{A_1B_1}$ ir $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{AO}$ ir $\overrightarrow{CO}$; b) $\overrightarrow{BA}$ ir $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{OB}$ ir $\overrightarrow{DO}$.
98. $\overrightarrow{BD_1} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$; $\overrightarrow{MD_1} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$; $\overrightarrow{NA_1} = -\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.
99. $\overrightarrow{OM} = -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$. **100.** a) $\overrightarrow{MK}$; b) $\overrightarrow{K_1N_1}$.
101. a) 1; b) −1; c) −2; d) $\frac{1}{2}$. **102.** 1,5a. **104.** 3 cm. **105.** 90°.
106. $\sqrt{13}$ ir $\sqrt{37}$. **107.** $\sqrt{13}$.
108. a) (−2; −4; 4); b) (−2; 4; 2); c) (4; 0; −6); d) $\left(0; -\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
109. a) (4; −1; −7); b) (−11; 2; 15,5); c) $(1; \frac{1}{2}; 2)$; d) $\left(1\frac{3}{5}; -\frac{1}{10}; -1\frac{3}{10}\right)$.
110. a) (−2; −2; −2); b) (10; 0; 12); c) (5; 7; −2); d) $\left(-3\frac{4}{5}; -2\frac{1}{5}; -2\frac{4}{5}\right)$.
111. a) (−21; −19; 14); b) (2,9; −7,2; −7,2); c) $\left(-2\frac{3}{4}; 2\frac{6}{7}; 3\frac{4}{5}\right)$.
112. a) (−0,5; 2,5; −8,5); b) (−1,5; 5; −10,5).
113. a) $\sqrt{5{,}25}$; b) 2; c) $\sqrt{14}$; d) 4,5. **114.** a) 0,5; b) $\frac{\sqrt{41}}{3}$.
115. a) $m = -3$, $n = -4$; b) $m = n = -1{,}5$.
116. a) $m = -5$; $n = 7$; b) $m = -2$, $n = 2$.
117. a) $m = -4$, $n = 7$; b) $m = -72$, $n = 50$. **118.** a), c), d) taip; b) ne.
119. a) $m = 8$, $n = 1$; b) $m = -16$, $n = \frac{1}{4}$; c) $m = \frac{4}{9}$, $n = -3\frac{3}{5}$; d) $m = \pm 2$, $n = \pm 4$.
120. −24.
121. a) $\overrightarrow{OA} = 5\vec{i}$; $\overrightarrow{OB} = 5\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$; $\overrightarrow{OC} = \sqrt{3}\vec{j}$; $\overrightarrow{OA_1} = 5\vec{i} + 8\vec{k}$; $\overrightarrow{OB_1} = 5\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j} + 8\vec{k}$; $\overrightarrow{OC_1} = \sqrt{3}\vec{j} + 8\vec{k}$; $\overrightarrow{OO_1} = 8\vec{k}$;
b) $\overrightarrow{OA}(5; 0; 0)$; $\overrightarrow{OC}(0; \sqrt{3}; 0)$; $\overrightarrow{OB_1}(5; \sqrt{3}; 8)$; $\overrightarrow{OO_1}(0; 0; 8)$.
122. a) 0; b) $2\sqrt{14}$; c) $2\sqrt{14}$; d) 0. **123.** a) 3; b) $\sqrt{58}$; c) $2\sqrt{23}$.
124. −3 arba 3. **125.** $m_1 = -2$, $m_2 = 2$. **126.** −4 arba 4.
127. a) Įvairiakraštis; b) status įvairiakraštis.
128. a) $AM = \frac{\sqrt{145}}{2}$; $BN = \frac{\sqrt{73}}{2}$; $CK = \sqrt{10}$; b) $AM = BN = \sqrt{15{,}5}$; $CK = \sqrt{14{,}75}$.
129. (0; 0; −1,5). **130.** (0; 7,375; 0).
134. (−12; 16; 15). **135.** a) 2; b) $14 - 6\sqrt{6}$; c) $14 + 6\sqrt{2}$; d) $14 + 12\sqrt{2}$.

136. -4. **137.** a) 8,5; b) 8; c) $\frac{17+\sqrt{3}}{2}$. **138.** 9. **139.** -1.
140. 9. **141.** a) 60°; b) $\pi - \arccos 0{,}46$. **142.** 135°. **143.** $-\frac{4\sqrt{5}}{9}$.
144. $\arccos \frac{2\sqrt{6}}{9}$. **145.** a) $\frac{4}{9}$; b) -1. **146.** $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. **147.** 2. **148.** $\left(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.
149. (2; 4; 2). **150.** -10. **151.** a) -18; $-\frac{18}{35}$; b) 24; $\frac{6\sqrt{7}}{35}$. **152.** 90°.
153. 120°; $8 - 3\sqrt{2}$. **154.** -2. **155.** $\frac{5}{6}$; $-\frac{\sqrt{2}}{6}$; $\frac{1}{2}$. **156.** ± 2.
157. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ status;
$\vec{a} \cdot \vec{c} = -22$, kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{c}$ bukas;
$\vec{a} \cdot \vec{d} = 2$, kampas tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{d}$ smailus;
$\vec{b} \cdot \vec{c} = 4{,}25$, kampas tarp vektorių $\vec{b}$ ir $\vec{c}$ smailus;
$\vec{b} \cdot \vec{d} = \frac{3}{4}$, kampas tarp vektorių $\vec{b}$ ir $\vec{d}$ smailus;
$\vec{c} \cdot \vec{d} = 1$, kampas tarp vektorių $\vec{c}$ ir $\vec{d}$ lygus 0.
158. a) $-\frac{\sqrt{10}}{5}$; $\frac{11}{5\sqrt{7}}$; $\frac{8}{\sqrt{70}}$; b) $\frac{\sqrt{6}}{15}$; $\frac{2\sqrt{2}}{9}$; $-\frac{23\sqrt{3}}{45}$.
159. $\angle A = \angle B = 45^\circ$, $\angle C = 90^\circ$. **160.** $\angle N = 90^\circ$; $P = \sqrt{46} + \sqrt{19} + \sqrt{65}$; $S = \frac{\sqrt{874}}{2}$.
161. a) 60°, 150°, 150°; b) 90°, 135°, 135°. **162.** a) $\arccos \frac{4}{\sqrt{65}}$; b) $\arccos \frac{63}{\sqrt{6441}}$.
163. $P = 1{,}5 + \sqrt{5{,}5} + \sqrt{22} + \sqrt{4{,}25}$. **164.** a) $\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$; b) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$; c) $\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$.
165. a) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$; b) $\pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$; c) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$. **166.** (2; -3; 0).
168. 21 m^2, 4,5 m^3. **169.** $6\sqrt{3} + 40$ cm^2, $24\sqrt{3}$ cm^3. **170.** 30 mm, $15\sqrt{2}$ mm.
171. 312 cm^2; 576 cm^3. **172.** 10 cm. **173.** 504 cm^3. **174.** 9.
175. a) 6 cm; b) 24 cm^2; c) $3\sqrt{3}$ cm; d) $12\sqrt{3}$ cm^2; e) $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ cm^2. **176.** 225 cm^3.
177. 12 cm. **179.** a) 16 cm; b) 16 cm; c) 768 cm^2; d) $1024\sqrt{3}$ cm^3.
180. $13{,}5\sqrt{3}$ cm^2; 6,75 cm^3. **181.** 56 m^2. **182.** 330 m^3. **183.** 15.
184. a) 54 m^2; b) $3\sqrt{3}$ m. **185.** a) 216 cm^3; b) $6\sqrt{3}$ cm.
186. a) 13 cm; b) $13\sqrt{3}$ cm; c) 1014 cm^2; d) 2197 cm^3. **187.** $3\sqrt{10}$; b) 2.
188. a) 30°; b) 60°. **189.** $10\sqrt{29}$ cm. **190.** 8 cm^2. **191.** 53,48 Lt.
192. 6 m^2. **193.** 37,8 kg. **194.** 17,25 m^3. **195.** 960 cm^3.
196. 4 cm, 8 cm, 12 cm. **197.** 6 cm, 14 cm, 16 cm. **198.** $\approx 11{,}3$ g/cm^3.
199. 1,8 g/cm^3. **200.** $6\sqrt{3}$ dm^3. **201.** $S_{\text{kubo}} = 16$ m^2, $S_{\text{stač.}} = 32$ m^2.
202. 120 cm^2. **203.** 12 680 mm^3. **204.** $3\sqrt{2}S$.
205. a) $\sqrt{2}$ ir 2; b) $\sqrt{3 - \sqrt{3}}$ ir $\sqrt{3 + \sqrt{3}}$. **206.** $\approx 5{,}77$ cm.
207. $\approx 3{,}54$ cm, ≈ 346 g. **208.** b) Trapecija; c) $10\sqrt{2}$, $5\sqrt{5}$, $5\sqrt{2}$, $5\sqrt{5}$.
210. a) 12; b) $12\sqrt{3}$; c) 864; 1728; d) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
211. a) $6\sqrt{3}$ cm; b) $4\sqrt{13}$ cm; c) $24\sqrt{13}$ cm^2; d) $72 + 360$ cm^2; $360\sqrt{3}$ cm^3.
212. a) 2) 84; 3) 36; b) 2) 360; 3) 300. **213.** 2187 cm^3.
214. $25\sqrt{3}$. **215.** $2\sqrt{2}S$. **216.** $\frac{1521\sqrt{2}}{2}$ cm^2. **217.** a) ≈ 220 cm^2; b) ≈ 370 cm^2.
218. 6 cm^3. Visos piramidės šoninės sienos su pagrindu sudaro 45° dvisienius kampus.
222. a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; b) 4; c) $\frac{3(\sqrt{3}+\sqrt{11})}{2}$. **223.** a) $\sqrt{\frac{3h^2+4a^2}{3}}$; b) $\frac{\sqrt{4h^2+a^2}}{2}$; c) $\frac{\sqrt{4h^2+3a^2}}{2}$.
224. a) $\sqrt{\frac{3m^2-a^2}{3}}$; b) $\sqrt{\frac{2m^2-a^2}{2}}$; c) $\sqrt{m^2 - a^2}$. **225.** 320 cm^2. **226.** ≈ 1446 cm^2.
227. 6 cm^2. **228.** 2) $6\sqrt{3}$ cm^3; $4\sqrt{6}$ cm^3; 6 cm^3. **229.** a) 24 m; b) 36 m^2.
230. a) 28 m; b) 49 m^2. **231.** $17{,}28\sqrt{7}$ m^2.
232. $a = 4$ dm; $h = 18$ dm; $AS = 2\sqrt{85}$ dm.

233. $\approx 0{,}7$ mm. **234.** $\approx 28{,}750$ kg. **235.** $\approx 15{,}850$ t.

236. a) $64\sqrt{3}\,\text{cm}^2$; b) $2\sqrt{\frac{59}{3}}$ cm; c) $\frac{128}{3}\sqrt{59}\,\text{cm}^3$. **237.** $900\,\text{cm}^2$; $400\,\text{cm}^2$; $100\,\text{cm}^2$.

238. a) $5\sqrt{119}\,\text{cm}^2$; b) $\frac{\sqrt{119}}{17}$ cm; c) $84\sqrt{2}$ cm; d) $\sqrt{14\,137}$, $\sqrt{14\,137}$, $\sqrt{393}$.
e) $5\sqrt{119}+1428\sqrt{2}\,\text{cm}^2$; f) $70\sqrt{238}\,\text{cm}^3$.

239. a) 20 cm; b) $60°$, $60°$, $60°$; c) $90°$, $\arccos\frac{\sqrt{4}}{14}$, $\arccos\frac{4}{91}$.

240. a) 80 mm; b) $1600\sqrt{3}\,\text{mm}^2$; c) $80\sqrt{3}$ mm; d) $9600+3200\sqrt{3}\,\text{mm}^2$; e) $64\,000\sqrt{3}\,\text{mm}^3$.

241. b) $408\,\text{dm}^2$, $240\,\text{dm}^3$; c) $234+18\sqrt{89}\,\text{dm}^2$, $360\,\text{dm}^3$; $270+18\sqrt{113}\,\text{dm}^2$, $504\,\text{dm}^3$.

242. a) $45+3\sqrt{1055}\,\text{cm}^2$, $\frac{\sqrt{166}}{2}\,\text{cm}^3$; b) $\frac{3}{8}\sqrt{415}\,\text{cm}^2$; c) $\arccos 3\sqrt{\frac{5}{211}}$.

243. 15. **244.** $3536\,\text{cm}^2$. **245.** $21\,\text{cm}^2$; $\frac{39\sqrt{3}}{8}\,\text{cm}^3$. **246.** $486\sqrt{3}$.

247. $\frac{a^3}{24}$; $\frac{a^2(\sqrt{3}+\sqrt{6})}{4}$. **248.** 40,38 t. **249.** $6240\,\text{cm}^3$. **250.** 8 cm.

251. $8\,\text{cm}^2$, $2\,\text{cm}^2$. **252.** a) 1) 28; 2) 545; 3) 30; b) 1) 27; 2) 1984; 3) 28.

253. a) $\frac{a^2-b^2}{2\cos\varphi}$; b) $\frac{a^3-b^3}{24}\sqrt{2}\,\text{tg}\,\varphi$ $(a>b)$. **254.** a) $17{,}28\,\text{m}^2$; b) $\approx 9{,}87\,\text{m}^3$.

255. $16\pi\,\text{m}^3$. **256.** 6 cm. **257.** a) $320\sqrt{2}\,\text{cm}^2$; b) $5120\pi\,\text{cm}^3$.

258. $(100\sqrt{3}\pi+150\pi)\,\text{cm}^2$; $750\pi\,\text{cm}^3$. **259.** $200\pi+18$; 90.

260. $600\pi\,\text{cm}^2$. **261.** $\approx 302{,}6$ kg. **262.** $3{,}29\pi\,\text{m}^2$, $2{,}94\pi\,\text{m}^2$. **263.** ≈ 41 t.

264. 9,872 kg. **265.** 208,23 m. **266.** 1884 kg.

267. ≈ 3 h. **268.** $16\,008\,\text{cm}^3$; $4113\,\text{cm}^2$. **269.** a) $\frac{1}{3}$; b) 9. **271.** $17{,}282\,\text{t} \approx 17$ t.

272. 1711 cm. **273.** $\approx 138°$. **274.** $11\frac{1}{9}$ cm; $2\frac{2}{9}\sqrt{14}$ cm. **276.** 3 arba 4.

277. $32\sqrt{2}\pi\,\text{cm}^3$. **278.** $20\,\text{dm}^2$. **279.** $\sqrt{3}(R-r)$; $\sqrt{3}(R^2-r^2)$.

280. a) $1\frac{2}{3}$ m; b) $10\pi\,\text{m}^2$; c) $3\frac{1}{9}\pi\,\text{m}^3$. **281.** $16\,\text{dm}^2$. **282.** $\sqrt{2}\pi Q$.

283. a) 583 280 kg; b) 325. **285.** 0,788 kg. **286.** $10\sqrt{10}$ cm. **287.** $3\,\text{dm}^2$.

288. $\approx 22{,}48$ cm. **289.** $\approx 18{,}16$ cm. **290.** 167. **291.** $8{,}84\,\text{g/cm}^3$.

292. $5{,}93\,\text{g/cm}^3$. **293.** $\approx 1{,}97$ cm. **294.** 1273. **295.** $\approx 376{,}8$ g.

296. ≈ 52 g. **297.** $\approx 19{,}543$ kg. **298.** 24 cm. **299.** $4{,}8\pi$ cm.

300. 11 cm. **301.** a) $\frac{R^2-d^2}{4R^2}$; b) $\frac{R-d}{R+d}$; c) $\frac{(R-d)^2(2R+d)}{(R+d)^2(2R-d)}$. **302.** 25.

303. $252\pi\,\text{cm}^3$; $720\pi\,\text{cm}^3$. **304.** $\frac{1}{3}\pi R^3$. **305.** $\frac{8\sqrt{3}\pi r^3}{27}$.

306. ≈ 646. **307.** 408 m. **308.** 35,1 kg. **309.** $\approx 9{,}17$ cm.

310. $2304\pi\,\text{cm}^3$. **311** a) $46{,}72\pi$, $41{,}984\pi$. **313.** $3\frac{1}{3}$ dm.

314. $\frac{8192\pi}{3}\,\text{cm}^3$; $256\sqrt{5}\pi\,\text{cm}^2$. **315.** $10\sqrt{2}$. **316.** $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$.

317. $\frac{2\sqrt{3}R}{3}$. **318.** $\frac{2\sqrt{6}R}{3}$. **319.** $\frac{a\sqrt{6}}{12}$. **320.** $\frac{1}{2}\sqrt{12R^2-3H^2}$.

321. $3\sqrt{3}R^2$. **322.** $(4a\sqrt{4R^2-2a^2}+2a^2)$ kv. v.; $a^2\sqrt{4R^2-2a^2}$ kub. v. **323.** $\frac{\pi a^2}{3}$.

324. $\frac{(1+2\sqrt{3})\pi R^2}{2}$ kv. v.; $\frac{\sqrt{3}\pi R^3}{4}$ kub. v. **325.** a) 1,5 karto; b) 1,5 karto.

326. $9\sqrt{3}\pi$. **327.** $9\sqrt{3}$ ir 3π.